

上智大学 2024 年度 経済学部共通数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

(1) 3 個のさいころを同時に投げ、出た目を小さい順に a_1, a_2, a_3 と並べる。(i) $a_3 = 3$ となる確率を求めよ。(ii) $a_2 = 4$ となる確率を求めよ。(iii) $a_2 > 4$ となる確率を求めよ。

(2) 方程式

$$2^{\log_9 x} - \frac{1}{8}x^{\log_9 8} = 0$$

の正の解を求めよ。

(3) $0 < \theta \leq \pi/6$ を満たすすべての θ に対して $\sin 4\theta + t \sin^2 2\theta \geq 0$ が成り立つような最小の実数 t を求めよ。

【方針】

(1) は最大値・中央値の条件を場合分けし、対称性も使う。(2) は両辺の底を 9 とした対数をとる。(3) は $\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$ を使い、 t の下限の最大値を求める。

【解答】

(1) (i) すべての目が 3 以下で、すべてが 2 以下ではない確率だから、 $(3/6)^3 - (2/6)^3 = 19/216$ である。

(ii) 3 個とも 4 の場合が 1 通り、ちょうど 2 個が 4 の場合が $3 \cdot 5 = 15$ 通り、ちょうど 1 個が 4 で他の 2 個が 4 の上下に分かれる場合が $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ 通りである。よって確率は $(1 + 15 + 36)/6^3 = 13/54$ である。

(iii) 対称性から $P(a_2 \geq 4) = 1/2$ である。(ii) を引いて $P(a_2 > 4) = 1/2 - 13/54 = 7/27$ となる。

(2) 移項して $2^{3+\log_9 x} = x^{\log_9 8}$ とする。底を 9 とする対数をとると $(3 + \log_9 x) \log_9 2 = 3(\log_9 2)(\log_9 x)$ だから、 $\log_9 x = 3/2$ である。したがって $x = 9^{3/2} = 27$ である。

(3) $\sin 2\theta > 0$ だから、不等式は $t \geq -2/\tan 2\theta$ と同値である。 $0 < 2\theta \leq \pi/3$ で $-2/\tan 2\theta$ の最大値は $-2/\sqrt{3} = -2\sqrt{3}/3$ である。よって最小値は $-2\sqrt{3}/3$ である。

【第 2 問】

座標空間に 3 点 $A(2, 0, 2), B(1, 1, 1), C(1, 0, 0)$ がある。実数 t に対して、点 P の座標を $(t+1, 2t, t+2)$ とする。

(1) 直線 AB と直線 CP が 1 点 Q で交わる t を求めよ。このとき $AQ : QB, CQ : QP, \triangle ABC$ に対する $\triangle ABP, \triangle BCP$ の面積比を求めよ。

(2) $\triangle ABP$ の面積が最小となる t と、その最小値を求めよ。

【方針】

(1) は Q を 2 直線上の媒介表示で置いて係数を比較し、面積比は共通の高さを使う。(2) は 2 辺の長さや内積から面積の 2 乗を求めて平方完成する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CQ} = l\overrightarrow{CP}$ とおいて座標を比較すると、 $(t, k, l) = (2/3, 2/3, 1/2)$ を得る。したがって $AQ : QB = 2 : 1, CQ : QP = 1 : 1$ である。

Q は CP の中点なので、 $\triangle ABP$ と $\triangle ABC$ は面積が等しい。また $AQ : QB = 2 : 1$ より $[\triangle BCP]/[\triangle ABC] = 2/3$ である。

(2) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -1), \overrightarrow{AP} = (t-1, 2t, t)$ である。よって $|\overrightarrow{AB}|^2 = 3, |\overrightarrow{AP}|^2 = 6t^2 - 2t + 1, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 1$ である。したがって面積の 2 乗は

$$\frac{1}{4}\{3(6t^2 - 2t + 1) - 1\} = \frac{1}{4}\left\{18\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{3}{2}\right\}.$$

よって $t = 1/6$ のとき最小値 $\sqrt{6}/4$ をとる。

【第 3 問】

関数 $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$ と正の実数 a に対して

$$F(x) = \frac{1}{a} \int_{x-a}^x f(t) dt$$

とおく。

- (1) 2 次関数 $y = F(x)$ のグラフの頂点を求めよ。
- (2) 区間 $0 \leq x \leq 1$ における $F(x)$ の最小値 m を a を用いて表せ。
- (3) $a > 0$ の範囲で a を変化させるとき、 m の最小値と、そのときの a を求めよ。

【方針】

積分を計算して $F(x)$ を平方完成する。頂点の x 座標が区間の左・内部・右のどこにあるかを a で場合分けし、各場合の m を比較する。

【解答】

(1) 積分を計算すると $F(x) = 3x^2 - 3(a-2)x + a^2 - 3a + 2$ である。平方完成して、頂点は $(a/2 - 1, a^2/4 - 1)$ となる。

(2) 軸は $x = a/2 - 1$ である。したがって

$$m = \begin{cases} a^2 - 3a + 2, & 0 < a < 2, \\ a^2/4 - 1, & 2 \leq a \leq 4, \\ a^2 - 6a + 11, & a > 4. \end{cases}$$

(3) $0 < a < 2$ では $m = (a - 3/2)^2 - 1/4$ だから、 $a = 3/2$ で $-1/4$ をとる。 $2 \leq a \leq 4$ では $m \geq 0$ 、 $a > 4$ では $m = (a - 3)^2 + 2 > 0$ である。よって全体の最小値は $-1/4$ 、そのとき $a = 3/2$ である。