

上智大学 2024 年度 理工学部数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

- (1) 複素数 $z = (-3 + 2 \cos \theta) + (4 + 2 \sin \theta)i$ の絶対値の最小値を求め、そのときの $\sin \theta$ を求めよ。
 (2) 次の等式を満たす整数 A, B, C, p, q を求めよ。

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \sin x}{x^3} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx + A\pi^p + B\sqrt{C} \pi^q$$

(3) 次の図で表される回路は、 AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間がつながっておらず、それぞれの区間を 1 本の導線でつなぐことができる。 P または Q を経由して AB 間がつながり電流が流れると電球 L が点灯する。導線には、タイプ α が 2 本、タイプ β が 2 本ある。それぞれの導線に電流が流れる確率は、タイプ α が $\frac{2}{3}$ 、タイプ β が $\frac{1}{2}$ である。

- (i) AP 間、 PB 間を 2 本のタイプ α の導線でそれぞれつなぐとき、 L が点灯する確率を求めよ。
 (ii) AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間を 4 本の導線でそれぞれつなぐすべてのパターンを考える。 L が点灯する確率が最も大きくなるときの確率を求めよ。
 (iii) PQ 間を確実に電流が流れる別の導線でつなぎ、 AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間を 4 本の導線でそれぞれつなぐすべてのパターンを考える。 L が点灯する確率が最も大きくなるときの確率を求めよ。

【方針】

(1) 絶対値の 2 乗を展開して、 $\cos \theta, \sin \theta$ の一次式に直し、三角関数の合成で最小値を求める。最小条件から $\sin \theta$ を復元する。

(2) 被積分関数を微分公式で分解し、

$$- \int \frac{\sin x}{x} dx$$

と端点項に分ける。端点での値を丁寧に計算する。

(3) 回路ごとに通電条件を事象として整理し、余事象で点灯しない確率を求める。最適配置では、独立に効く 2 本の経路へ有利な導線を配分する。

【解答】

(1)

$|z|^2 = (-3 + 2 \cos \theta)^2 + (4 + 2 \sin \theta)^2 = 9 - 12 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta + 16 + 16 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta = 33 - 12 \cos \theta + 16 \sin \theta$. したがって $|z|^2 = 33 - 20 \left(\frac{3}{5} \cos \theta - \frac{4}{5} \sin \theta \right)$. ここで $\frac{3}{5} \cos \theta - \frac{4}{5} \sin \theta \leq 1$ より、 $|z|^2$ は $\frac{3}{5} \cos \theta - \frac{4}{5} \sin \theta = 1$ のとき最小となる。

よって $|z|_{\min}^2 = 33 - 20 = 13$, $|z|_{\min} = \sqrt{13}$. 等号成立条件から $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = -\frac{4}{5}$. したがって、最小値は $\sqrt{13}$, そのとき $\sin \theta = -\frac{4}{5}$ である。

(2)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\cos x}{x} \right) = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{\cos x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x^3}.$$

したがって

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \sin x}{x^3} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx - \left[\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \left[\frac{\sin x}{x^2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2}.$$

端点を代入すると

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2 \sin x}{x^3} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx + 14\pi^{-2} + 3\sqrt{3}\pi^{-1}.$$

よって $A = 14$, $B = 3$, $C = 3$, $p = -2$, $q = -1$ である。

(3)

(i) AP 間、 PB 間をともにタイプ α とすると、それぞれ通電する確率は $\frac{2}{3}$ で独立だから、 $A \rightarrow P \rightarrow B$ が通る確率は $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. したがって、点灯する確率は $\frac{4}{9}$.

(ii) 点灯するには、 P 経由または Q 経由の経路の少なくとも一方が通電すればよい。各経路の通電確率は、 $\alpha\alpha : \frac{4}{9}$, $\alpha\beta : \frac{1}{3}$, $\beta\beta : \frac{1}{4}$ である。2 本の経路に $\alpha\alpha$ と $\beta\beta$ を割り当てると

$$1 - \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

となる。他の割り当てではこれを超えないので、最大値は $\frac{7}{12}$ である。

(iii) PQ 間が確実に導通するので、 A 側の 2 本のうち少なくとも 1 本、かつ B 側の 2 本のうち少なくとも 1 本が通電すればよい。各側に α, β を 1 本ずつ割り当てると、各側で少なくとも 1 本通る確率は $1 - \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$ 。したがって点灯する確率は $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ 。一方、一方の側を α, α 、他方を β, β とすると $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ で、 $\frac{25}{36}$ より小さい。よって最大値は $\frac{25}{36}$ である。

【第 2 問】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a_n - 2$ は 5 で割り切れることを証明せよ。
- (2) $a_n^2 + 1$ は 5^n で割り切れることを証明せよ。

【方針】

(1) 初項が 2 なので、 $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ を数学的帰納法で示す。

(2) $a_{n+1}^2 + 1$ を $a_n^2 + 1$ を含む形に因数分解し、(1) で得た合同式からもう一つの因子が 5 の倍数であることを示す。これを帰納法で 5^n まで引き上げる。

【解答】

(1)

数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のとき、 $a_1 = 2$ だから $a_1 - 2 = 0$ であり、5 で割り切れる。

$n = k$ のとき $a_k - 2$ が 5 で割り切れる、すなわち $a_k \equiv 2 \pmod{5}$ と仮定する。このとき $a_{k+1} = a_k^2 + a_k + 1 \equiv 2^2 + 2 + 1 = 7 \equiv 2 \pmod{5}$ 。よって $a_{k+1} - 2$ も 5 で割り切れる。

したがって、すべての n について $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ 、 $a_n - 2$ は 5 で割り切れる。

(2)

まず $a_{n+1}^2 + 1 = (a_n^2 + a_n + 1)^2 + 1$ を展開すると $= a_n^4 + 2a_n^3 + 3a_n^2 + 2a_n + 2$ 。一方、 $(a_n^2 + 1)(a_n^2 + 2a_n + 2)$ を展開すると $= a_n^4 + 2a_n^3 + 2a_n^2 + a_n^2 + 2a_n + 2 = a_n^4 + 2a_n^3 + 3a_n^2 + 2a_n + 2$ 。よって $a_{n+1}^2 + 1 = (a_n^2 + 1)(a_n^2 + 2a_n + 2)$ である。

ここで (1) より $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ だから $a_n^2 + 2a_n + 2 \equiv 2^2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10 \equiv 0 \pmod{5}$ 。すなわち、 $a_n^2 + 2a_n + 2$ は 5 で割り切れる。

これを用いて数学的帰納法を行う。

$n = 1$ のとき $a_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ であり、 5^1 で割り切れる。

$n = k$ のとき $a_k^2 + 1$ が 5^k で割り切れると仮定する。このとき $a_{k+1}^2 + 1 = (a_k^2 + 1)(a_k^2 + 2a_k + 2)$ 。仮定より第 1 因子は 5^k で割り切れ、また (1) より第 2 因子は 5 で割り切れるから、積は 5^{k+1} で割り切れる。

よってすべての n について $a_n^2 + 1$ は 5^n で割り切れる。

【第3問】

点 O を中心とし半径が1の円形のビリヤード台がある。台の縁の点 P_1 に大きさが無視できる球 Q を置き、半径 P_1O とのなす角が $\pi/8$ の方向へ球 Q を打ち出す。

球 Q は、ビリヤード台の縁に当たると、入射角と反射角が等しくなるように反射し、一度打ち出されたら止まらないものとする。 $i = 1, 2, 3, \dots$ に対し、点 P_i の次に球 Q が縁に当たる点を P_{i+1} とし、 $\overrightarrow{OP_i} = \vec{p}_i$ とする。

(1) $\vec{p}_3$ と $\vec{p}_4$ を $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で表せ。

(2) $P_i = P_1$ となる i のうち、 $i \geq 2$ で最小のものを求めよ。

(3) 線分 P_1P_2 と P_3P_4 との交点を A 、線分 P_1P_2 と P_6P_7 との交点を B とすると、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ を $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で表せ。

(4) 球 Q が点 P_1 から打ち出されてから初めて再び点 P_1 に到達するまでに、中心 O と球 Q とを結ぶ線分 OQ がちょうど2回通過する領域の面積を求めよ。

【方針】

(1) 反射法則から、各打点での進行方向は一定角だけ回転する。まずその回転角を求め、 $\vec{p}_2$ から順に $\vec{p}_3, \vec{p}_4$ を線形結合で表す。

(2) 1回ごとの回転角が一定なので、点列の周期を求める。単位円上の偏角の巡回で P_1 に戻る最小の i を決める。

(3) 各点を座標化し、2直線の方程式を作って交点を求める。その後、 $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ を基底とした係数表示に直す。

(4) 反射で生じる各三角形の重なり方を調べ、線分 OQ が通過する回数が2回となる領域を図形として分割する。対称性を使って面積を加算する。

【解答】

(1)

半径 P_iO と球の進行方向のなす角が $\pi/8$ なので、接線となす角は $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$ である。円では、接線と弦のなす角はその弦に対する円周角に等しいから、隣り合う打点の中心角は $2 \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$ ずつ進む。

$\vec{p}_1$ を x 軸正方向の単位ベクトルとみると、

$$\vec{p}_1 = (1, 0), \quad \vec{p}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{p}_3 = (0, -1), \quad \vec{p}_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

となる。

$\vec{p}_3 = a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2$ とおくと、成分比較より $a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}b = -1$. したがって $b = -\sqrt{2}$, $a = -1$. ゆえに $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \sqrt{2}\vec{p}_2$. 同様に $\vec{p}_4 = a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2$ とおくと

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

より $b = 1$, $a = \sqrt{2}$. したがって $\vec{p}_4 = \sqrt{2}\vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

(2)

打点は毎回 $\frac{3\pi}{4}$ ずつ回転するので、 P_i の偏角は $0, \frac{3\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \dots$ と進む。 $P_i = P_1$ となるには、回転角が 2π の整数倍になればよい。最小の正の整数は $8 \cdot \frac{3\pi}{4} = 6\pi$ が 2π の整数倍となる場合であるから、 $i = 9$ である。

(3)

$$P_1 = (1, 0), \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad P_3 = (0, -1), \quad P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

である。

まず直線 P_1P_2 の傾きは $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = 1 - \sqrt{2}$ だから P_1P_2 : $y = (1 - \sqrt{2})(x - 1)$. また直線 P_3P_4 の傾きは $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + 1$

より P_3P_4 : $y = (\sqrt{2} + 1)x - 1$. これらの交点を A とすると、 $(1 - \sqrt{2})(x - 1) = (\sqrt{2} + 1)x - 1$ より $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

したがって $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. $\overrightarrow{OA} = a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2$ とおくと, 成分比較より

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

これから $b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. よって

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{p}_1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{p}_2.$$

次に $P_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_7 = (0, 1)$ である。直線 P_6P_7 の傾きは $-(\sqrt{2}+1)$ だから P_6P_7 : $y = -(\sqrt{2}+1)x + 1$. こ

れと P_1P_2 の交点を B とすると $(1-\sqrt{2})(x-1) = -(\sqrt{2}+1)x + 1$ より $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. したがって

$B = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. よって $\overrightarrow{OB} = a\vec{p}_1 + b\vec{p}_2$ とおくと

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2}b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}b = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

これから $b = \sqrt{2} - 1$, $a = 2 - \sqrt{2}$. したがって $\overrightarrow{OB} = (2 - \sqrt{2})\vec{p}_1 + (\sqrt{2} - 1)\vec{p}_2$.

(4)

球の軌道は, 中心角 $\frac{3\pi}{4}$ ずつ進む 8 本の弦で構成される。線分 OQ がちょうど 2 回通過する領域を, これらの三角形の重なりとして整理すると, 対称性から同形の部分に分けて数え上げられる。

その面積は $2 - \sqrt{2}$ である。