

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2024 年 度 理 工 学 部 数 学

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) 複素数 $z = (-3 + 2\cos\theta) + (4 + 2\sin\theta)i$ の絶対値の最小値を求め、そのときの $\sin\theta$ を求めよ。

(2) 次の等式を満たす整数 A, B, C, p, q を求めよ。

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\sin x}{x^3} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx + A\pi^p + B\sqrt{C}\pi^q$$

(3) 次の図で表される回路は、 AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間がつながっておらず、それぞれの区間を 1 本の導線でつなぐことができる。 P または Q を経由して AB 間がつながり電流が流れると電球 L が点灯する。導線には、タイプ α が 2 本、タイプ β が 2 本ある。それぞれの導線に電流が流れる確率は、タイプ α が $\frac{2}{3}$ 、タイプ β が $\frac{1}{2}$ である。

(i) AP 間、 PB 間を 2 本のタイプ α の導線でそれぞれつなぐとき、 L が点灯する確率を求めよ。

(ii) AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間を 4 本の導線でそれぞれつなぐすべてのパターンを考える。 L が点灯する確率が最も大きくなるときの確率を求めよ。

(iii) PQ 間を確実に電流が流れる別の導線でつなぎ、 AP 間、 AQ 間、 PB 間、 QB 間を 4 本の導線でそれぞれつなぐすべてのパターンを考える。 L が点灯する確率が最も大きくなるときの確率を求めよ。

第 2 問

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a_n - 2$ は 5 で割り切れることを証明せよ。
- (2) $a_n^2 + 1$ は 5^n で割り切れることを証明せよ。

第 3 問

点 O を中心とし半径が 1 の円形のビリヤード台がある。台の縁の点 P_1 に大きさが無視できる球 Q を置き、半径 P_1O とのなす角が $\pi/8$ の方向へ球 Q を打ち出す。

球 Q は、ビリヤード台の縁に当たると、入射角と反射角が等しくなるように反射し、一度打ち出されたら止まらないものとする。 $i = 1, 2, 3, \dots$ に対し、点 P_i の次に球 Q が縁に当たる点を P_{i+1} とし、 $\overrightarrow{OP_i} = \vec{p}_i$ とする。

(1) $\vec{p}_3$ と $\vec{p}_4$ を $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で表せ。

(2) $P_i = P_1$ となる i のうち、 $i \geq 2$ で最小のものを求めよ。

(3) 線分 P_1P_2 と P_3P_4 との交点を A 、線分 P_1P_2 と P_6P_7 との交点を B とすると、 $\overrightarrow{OA}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ を $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ で表せ。

(4) 球 Q が点 P_1 から打ち出されてから初めて再び点 P_1 に到達するまでに、中心 O と球 Q とを結ぶ線分 OQ がちょうど 2 回通過する領域の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)