

上智大学 2024 年度 TEAP1 数学 (AM)

解答

全 3 問

【第 1 問】

一辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ において、辺 AD 上の点 E 、辺 DC 上の点 F 、辺 CA 上の点 G 、辺 BC 上の点 H を $AE = DF = CG = 2t$ 、 $BH = t$ となるようにとる。ただし、 $0 \leq t \leq 1$ とする。

- (1) $\triangle EFG$ の面積を求めよ。
- (2) B から平面 ACD に垂線を下ろし、その交点を P とするとき、 BP を求めよ。
- (3) H から平面 EFG に垂線を下ろし、その交点を Q とするとき、 HQ を求めよ。
- (4) 四面体 $HEFG$ の体積が最小になる t を求めよ。

【方針】

正三角形 ACD から 3 個の隅の三角形を除いて $\triangle EFG$ の面積を求める。正四面体の高さを計算し、 H の高さは辺 BC 上で線形に変化することを使う。最後に体積を t の 3 次式として微分する。

【解答】

(1) $\triangle ACD$ の面積は $\sqrt{3}$ である。また、 $\triangle AEG, \triangle DFE, \triangle CGF$ の面積はいずれも $\sqrt{3}t(1-t)$ である。したがって

$$[\triangle EFG] = \sqrt{3}\{3t^2 - 3t + 1\}.$$

(2) 辺 AD の中点を M とすると、 $BM = \sqrt{3}$ 、 $CM = \sqrt{3}$ である。 P は $\triangle BCM$ における B から CM への垂線の足であり、面積を 2 通りに表すと $BP = 2\sqrt{6}/3$ となる。

(3) 平面 EFG は平面 ACD と同じである。点 H は辺 BC を $BH : HC = t : (2-t)$ に分けるので、高さも同じ比で変化する。よって $HQ = (2-t)BP/2 = \sqrt{6}(2-t)/3$ である。

(4) 体積を $V(t)$ とすると

$$V(t) = \frac{1}{3} [\triangle EFG] HQ = \frac{\sqrt{2}}{3} (3t^2 - 3t + 1)(2-t).$$

$\sqrt{2}/3$ を除いた部分を $g(t)$ とすると、 $g'(t) = -9t^2 + 18t - 7$ である。区間 $0 \leq t \leq 1$ では $t = 1 - \sqrt{2}/3$ で減少から増加に変わる。したがって、求める値は $t = 1 - \sqrt{2}/3$ である。

【第 2 問】

表と裏が出る確率がそれぞれ $1/2$ である硬貨がある。座標平面上の点 $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ について、硬貨を 1 回投げるとに次の規則で点を動かす。この操作を n 回繰り返した直後の点 A, B を考える。

- 表が出たとき、 A は動かさず、 B を A を中心に反時計回りに 90° 回転した位置へ動かす。
- 裏が出たとき、 B は動かさず、 A を B を中心に反時計回りに 90° 回転した位置へ動かす。

- (1) $n = 10$ のとき、 $\overrightarrow{AB}$ を求めよ。
- (2) $n = 3$ のとき、 A が位置し得る座標の総数を求めよ。
- (3) $n = 4$ のとき、 A が原点にある確率と、 A が x 軸上にある確率を求めよ。
- (4) $n = 8$ のとき、 A が原点にある確率と、 A が x 軸上にある確率を求めよ。

【方針】

表裏のどちらでも $\overrightarrow{AB}$ は毎回 90° 回転する。点 A が動くのは裏のときだけなので、4 回を 1 組として裏が出た位置に対応する変位ベクトルを数える。8 回では 2 組の分布を畳み合わせる。

【解答】

(1) 表裏のどちらでも $\overrightarrow{AB}$ は反時計回りに 90° 回転する。したがって、10 回後には $(1,0)$ が 900° 回転しているから、 $\overrightarrow{AB} = (-1,0)$ である。

(2) 3 回の各段階で裏が出たときの A の変位は、順に $(1,-1), (1,1), (-1,1)$ である。これらを選ぶ部分集合を調べると、得られる座標は 6 個である。

(3) 4 回の変位候補は $(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ である。選んだ変位の和が $(0, 0)$ となる選び方は 4 通りなので、原点にある確率は $4/16 = 1/4$ である。 y 成分の和が 0 となる選び方は 6 通りなので、 x 軸上にある確率は $6/16 = 3/8$ である。

(4) 4 回分の y 成分の変化量 $-2, -1, 0, 1, 2$ の生じる場合の数は順に $1, 4, 6, 4, 1$ である。2 組の和が 0 となる場合は $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$ 通りだから、 x 軸上にある確率は $70/256 = 35/128$ である。

また、4 回後の位置ごとの場合の数を反対位置同士で組み合わせると、8 回後に原点へ戻る場合は 36 通りである。したがって、原点にある確率は $36/256 = 9/64$ である。

【第 3 問】

(1) 整数の組 (x, y) で

$$\log_{1/4} y < \log_{1/2}(x-1), \quad 2^{y-1} < 8^x$$

を満たすものの個数を求めよ。

(2) $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{6}$, $CA = 2\sqrt{3} - 2$ の $\triangle ABC$ がある。角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。 $\triangle ABC$ の面積と AD を求めよ。

(3) 座標平面上で、直線 $y = 2x - 3$ を原点を中心に反時計回りに 45° 回転して得られる直線の方程式を求めよ。

(4) 放物線 $y = x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ ($0 \leq t \leq 1$) における接線と、放物線 $y = -(x+1)^2$ の 2 つの共有点の中点を Q とする。ただし、共有点が 1 つの場合はその共有点を Q とする。点 Q の座標を求め、 t が $0 \leq t \leq 1$ を動くときに線分 PQ が動いてできる図形の面積を求めよ。

【方針】

(1) は底が 1 未満の対数不等式に注意して 2 曲線の間の格子点を数える。(2) は余弦定理と角の二等分線定理を使う。(3) は傾きと直線上の一点を回転する。(4) は解と係数の関係で中点を求め、線分の掃引領域を x の範囲ごとに記述して積分する。

【解答】

(1) 真数条件は $x > 1$, $y > 0$ である。不等式はそれぞれ $y > (x-1)^2$, $y < 3x+1$ と同値である。2 曲線の交点から $x = 2, 3, 4$ だけを調べればよい。各 $x = k$ に対する整数 y の個数は $(3k+1) - (k-1)^2 - 1 = -k^2 + 5k - 1$ だから、総数は $5 + 5 + 3 = 13$ 個である。

(2) 余弦定理より $\cos C = 1/\sqrt{2}$ なので、 $C = 45^\circ$ である。したがって

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6}(2\sqrt{3}-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

角の二等分線定理から $CD = CA \cdot BC / (AB + CA) = 4\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$ である。 $\triangle ACD$ に余弦定理を用いると $AD^2 = (8 - 4\sqrt{3})^2$ となるので、 $AD = 8 - 4\sqrt{3}$ である。

(3) 元の直線の傾き角を α とすると $\tan \alpha = 2$ であり、回転後の傾きは $\tan(\alpha + 45^\circ) = -3$ である。また、点 $(3/2, 0)$ は $(3\sqrt{2}/4, 3\sqrt{2}/4)$ へ移る。よって直線の方程式は $y = -3x + 3\sqrt{2}$ である。

(4) 点 P における接線は $y = 2tx - t^2$ である。これと $y = -(x+1)^2$ を連立して得る 2 次方程式の 2 解の和は $-2(t+1)$ だから、中点の x 座標は $-t-1$ である。接線へ代入して $Q = (-t-1, -3t^2-2t)$ を得る。

線分 PQ の掃引領域は

$$\begin{cases} 2x-1 \leq y \leq -3x^2-4x-1, & -2 \leq x < -1, \\ 2x-1 \leq y \leq 0, & -1 \leq x < 0, \\ 2x-1 \leq y \leq x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

である。したがって面積は

$$\int_{-2}^{-1} (-3x^2 - 6x) dx + \int_{-1}^0 (1 - 2x) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{13}{3}.$$