

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2024 年 度 TEAP2 数 学 (PM)

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

- (1) $77x + 52y = 1$ を満たす整数 x, y の組のうち, x が正で最小の組を求めよ。
- (2) 複素数 $(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^{2024}$ を極形式で表したときの絶対値を r , 偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とする。 $\log_2 r/2024$ と θ を求めよ。
- (3) $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。
- (i) $\log_{10} 1.28$ を求めよ。
- (ii) $n \geq 2$ を整数とする。 $n^{100} < 1.28^n$ となる最小の n に対して, $2^a \leq n < 2^{a+1}$ となる整数 a を求めよ。

第 2 問

平面 α 上にある長方形 $ABCD$ と、 α 上にない点 O で定まる四角錐 $O-ABCD$ を考える。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき、

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 7, \quad |\vec{c}| = 2\sqrt{11}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 33, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 34$$

である。

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を求めよ。

(3) O から平面 α に下ろした垂線を OH とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表し、点 H が長方形のどの位置にあるか答えよ。

(4) 長方形 $ABCD$ の面積を求めよ。

(5) 四角錐 $O-ABCD$ の体積を求めよ。

第 3 問

(1) $x > 0$ のとき，関数 $y = e^x/x$ の極値を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2) 次の等式を満たす正の定数 a を求めよ。

$$\int_a^{2a} \frac{e^x}{x} dx = \int_a^{2a} \frac{e^x}{x^2} dx$$

(3) 次の等式を満たす異なる正の整数 m, n が存在しないことを証明せよ。

$$\int_m^n \frac{e^x}{x} dx = \int_m^n \frac{e^x}{x^2} dx$$

第 4 問

漸化式

$$a_{n+2} = na_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A})$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) (A) を満たす数列を 1 つ挙げよ。

(2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が (A) を満たすとき、任意の実数 x, y に対して数列 $\{xa_n + yb_n\}$ も (A) を満たすことを証明せよ。

(3) (A) は次の条件 (P) を満たす。

(P) (A) を満たすすべての数列は、ある実数 s, t を用いて $\{sc_n + td_n\}$ と表される。

(i) $\{c_n\}$ と $\{d_n\}$ の例を挙げよ。

(ii) (i) で挙げた例が (P) を満たすことを証明せよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)