

上智大学 2024 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

- (1) $77x + 52y = 1$ を満たす整数 x, y の組のうち, x が正で最小の組を求めよ。
- (2) 複素数 $(\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^{2024}$ を極形式で表したときの絶対値を r , 偏角を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とする。 $\log_2 r / 2024$ と θ を求めよ。
- (3) $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。
- (i) $\log_{10} 1.28$ を求めよ。
- (ii) $n \geq 2$ を整数とする。 $n^{100} < 1.28^n$ となる最小の n に対して, $2^a \leq n < 2^{a+1}$ となる整数 a を求めよ。

【方針】

(1) は拡張ユークリッド互除法。(2) はもとの複素数の絶対値と偏角を求めてド・モアブルの定理を使う。(3) は常用対数を用い, $\log_{10} x/x$ の単調性と $2^{11}, 2^{12} - 1$ での値を比較する。

【解答】

- (1) ユークリッドの互除法を逆にたどると $1 = 77 \cdot 25 - 52 \cdot 37$ である。一般解は $x = 52k + 25, y = -77k - 37$ だから, x が正で最小となるのは $k = 0$ のときであり, $(x, y) = (25, -37)$ である。
- (2) $\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}(\cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3))$ である。したがって $r = (2\sqrt{2})^{2024} = 2^{3036}$ なので, $\log_2 r / 2024 = 3/2$ である。偏角は $2024\pi/3$ を 2π で整理して $\theta = 2\pi/3$ となる。
- (3) (i) $1.28 = 2^7 \cdot 10^{-2}$ より, $\log_{10} 1.28 = 7 \cdot 0.301 - 2 = 0.107$ である。
- (ii) 常用対数をとると, 条件は $\log_{10} n/n < 0.00107$ となる。 $f(x) = \log_{10} x/x$ は $x > e$ で減少する。また $f(2^{11}) \simeq 0.001616 > 0.00107, f(2^{12} - 1) \simeq 0.000882 < 0.00107$ である。よって最小の n は $2^{11} < n < 2^{12}$ を満たすので, $a = 11$ である。

【第 2 問】

平面 α 上にある長方形 $ABCD$ と, α 上にない点 O で定まる四角錐 $O-ABCD$ を考える。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき,

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 7, \quad |\vec{c}| = 2\sqrt{11}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 33, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 34$$

である。

- (1) $\vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。
- (2) $\vec{a} \cdot \vec{c}$ を求めよ。
- (3) O から平面 α に下ろした垂線を OH とする。 $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表し, 点 H が長方形のどの位置にあるか答えよ。
- (4) 長方形 $ABCD$ の面積を求めよ。
- (5) 四角錐 $O-ABCD$ の体積を求めよ。

【方針】

長方形の平行関係と直交関係をベクトルで表す。垂足 H は平面上の一次結合で置き, $\overrightarrow{OH}$ が隣り合う 2 辺に垂直となる連立方程式を解く。底面積と高さから体積を求める。

【解答】

- (1) 長方形では $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ だから, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ である。
- (2) $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ より, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 18$ である。
- (3) $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}$ とおく。 $\overrightarrow{OH}$ が $\vec{b} - \vec{a}$ と $\vec{c} - \vec{b}$ の双方に垂直である条件を解くと, $s = 1/4, t = 3/20$ を得る。したがって $\overrightarrow{OH} = \vec{a}/4 + 3\vec{b}/20 + 3\vec{c}/5$ である。係数がすべて正で和が 1 だから, H は $\triangle ABC$ の内部にある。
- (4) $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 64, |\vec{c} - \vec{b}|^2 = 25$ なので, 長方形の面積は $8 \cdot 5 = 40$ である。
- (5) (3) の式から $|\overrightarrow{OH}|^2 = 36$ となるので, 高さは 6 である。よって体積は $40 \cdot 6/3 = 80$ である。

【第 3 問】

- (1) $x > 0$ のとき、関数 $y = e^x/x$ の極値を求め、そのグラフの概形をかけ。
 (2) 次の等式を満たす正の定数 a を求めよ。

$$\int_a^{2a} \frac{e^x}{x} dx = \int_a^{2a} \frac{e^x}{x^2} dx$$

- (3) 次の等式を満たす異なる正の整数 m, n が存在しないことを証明せよ。

$$\int_m^n \frac{e^x}{x} dx = \int_m^n \frac{e^x}{x^2} dx$$

【方針】

$f(x) = e^x/x$ とおくと、2つの被積分関数の差が $f'(x)$ になる。(1) で得た単調性を (2)(3) にそのまま利用する。

【解答】

- (1) $f'(x) = e^x(x-1)/x^2$ である。したがって $0 < x < 1$ で減少し、 $x > 1$ で増加するので、 $x = 1$ で極小値 e をとる。また $x \rightarrow 0+$ 、 $x \rightarrow \infty$ のいずれでも $f(x) \rightarrow \infty$ である。よってグラフは $(1, e)$ を底とする下に凸の形になる。
 (2) 被積分関数の差は $f'(x)$ だから、等式は $f(2a) - f(a) = 0$ と同値である。すなわち $e^{2a}/(2a) = e^a/a$ なので、 $e^a = 2$ 、したがって $a = \log 2$ である。
 (3) 同様に、等式が成り立つなら $f(n) = f(m)$ である。正の整数 m, n はともに 1 以上であり、 f は $x \geq 1$ で単調に増加する。よって $m \neq n$ なら $f(m) \neq f(n)$ であり、矛盾する。したがって該当する異なる正の整数は存在しない。

【第 4 問】

漸化式

$$a_{n+2} = na_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A})$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

- (1) (A) を満たす数列を 1 つ挙げよ。
 (2) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が (A) を満たすとき、任意の実数 x, y に対して数列 $\{xa_n + yb_n\}$ も (A) を満たすことを証明せよ。
 (3) (A) は次の条件 (P) を満たす。
 (P) (A) を満たすすべての数列は、ある実数 s, t を用いて $\{sc_n + td_n\}$ と表される。
 (i) $\{c_n\}$ と $\{d_n\}$ の例を挙げよ。
 (ii) (i) で挙げた例が (P) を満たすことを証明せよ。

【方針】

零数列を例にし、漸化式の線形性を直接確認する。(3) では初期値が $(1, 0)$ と $(0, 1)$ の 2 数列を用意し、任意の解との差の最初の 2 項を 0 にして帰納する。

【解答】

- (1) $a_n = 0$ とすれば、すべての n で (A) を満たす。
 (2) $u_n = xa_n + yb_n$ とおくと、 $u_{n+2} = x(na_{n+1} - a_n) + y(nb_{n+1} - b_n) = nu_{n+1} - u_n$ である。したがって $\{u_n\}$ も (A) を満たす。
 (3) (i) $c_1 = 1, c_2 = 0$ および $d_1 = 0, d_2 = 1$ とし、以後は (A) で定める数列をとる。
 (ii) 任意の解 $\{a_n\}$ に対して $s = a_1, t = a_2$ とし、 $x_n = a_n - sc_n - td_n$ とおく。(2) より $\{x_n\}$ は (A) を満たし、 $x_1 = x_2 = 0$ である。漸化式から帰納的に $x_n = 0$ となるので、 $a_n = sc_n + td_n$ である。よって (P) が成り立つ。