

上智大学 2025 年度 経済学部共通数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

- (1) 領域 $D_1: x^2 - y \leq 0$ 内で $ax + y$ の最小値を m とする。(i) $a = -1$ のときの m , (ii) 一般の a に対する m , (iii) $a > 0$ のとき最小値をとる点を m で表せ。
- (2) $f(x)$ を 2 次関数とし、領域 $D_2: f(x) - y \leq 0$ 内で $bx + y$ の最小値が $-b^2/8 + b + 3$ である。 $y = f(x)$ の頂点と $f(x)$ を求めよ。

【方針】

領域はグラフの上側なので、境界上の 2 次式を平方完成する。(2) は一般の 2 次関数の最小値を b の 2 次式として係数比較する。

【解答】

- (1) 境界上で $ax + y = x^2 + ax = (x + a/2)^2 - a^2/4$ 。よって $m = -a^2/4$ であり、 $a = -1$ なら $m = -1/4$ 。最小点は $(-a/2, a^2/4)$ 。 $a > 0$ では $a = 2\sqrt{-m}$ なので $(-\sqrt{-m}, -m)$ である。
- (2) $f(x) = Ax^2 + Cx + D$ とすると、 $bx + f(x)$ の最小値は $D - (b + C)^2/(4A)$ 。係数比較から $A = 2, C = -4, D = 5$ 。したがって $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ 、頂点は $(1, 3)$ である。

【第 2 問】

- 三角形 OAB で $OA = 5, OB = 6, AB = 7$ とする。頂点 O の内角の二等分線と、頂点 A の外角の二等分線の交点を C とする。 C から直線 OA に下ろした垂線の足を H とし、 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ とする。
- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を求めよ。(2) $\overrightarrow{OC}$ を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ で表し、 $|OC|$ を求めよ。(3) $\overrightarrow{OH}$ を $\mathbf{a}$ で表せ。(4) $|CH|$ を求めよ。(5) 三角形 ABC の面積を求めよ。

【方針】

余弦定理で内積を求める。角の二等分線は単位ベクトルの和・差で方向を表し、2 直線の係数を比較する。射影と内積による面積公式で残りを処理する。

【解答】

- (1) 余弦定理より $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (25 + 36 - 49)/2 = 6$ 。
- (2) 2 本の二等分線を単位ベクトルで表して係数比較すると $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{5}{4}\mathbf{b}$ 。内積を用いて長さを計算すると $|OC| = 3\sqrt{15}$ 。
- (3) $\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OC} \cdot \mathbf{a}/|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a} = (9/5)\mathbf{a}$ 。
- (4) $\mathbf{b}$ の $\mathbf{a}$ に垂直な成分の長さは $12\sqrt{6}/5$ 。これを $5/4$ 倍して $|CH| = 3\sqrt{6}$ 。
- (5) 三角形 OAB の面積は $\frac{1}{2}\sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2} = 6\sqrt{6}$ 。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の係数から面積比は $7/4$ なので、三角形 ABC の面積は $21\sqrt{6}/2$ である。

【第 3 問】

- (1) 次の条件が必要条件, 十分条件, 必要十分条件, いずれでもない, のどれかを答えよ。(i) $|a| + |b| < 3$ は $a^2 + b^2 < 4$ であるための何条件か。(ii) $a + b$ が有理数であることは, $a^2 + b^2$ が有理数であるための何条件か。(iii) $|a - b| < 2$ は $\log_2 |x - a| + \log_2 |x - b| = 1$ が異なる 2 実数解をもつための何条件か。
- (2) $A_k = (\cos(2k\pi/n), \sin(2k\pi/n), 2k/n)$ とし, $S_n = \sum_{k=1}^n |A_{k-1} A_k|$ とする。 S_2, S_3, S_6 を求めよ。
- (3) 1000 未満の自然数で, 12 で割ると 5 余り, 29 で割ると 8 余るものの最小値と最大値を求めよ。

【方針】

(1) は一方向の証明と反例を組み合わせる。(iii) は絶対値を外して積が 2 または -2 となる 2 次方程式を調べる。(2) は 1 辺の長さを求める。(3) は合同式を解く。

【解答】

(1) (i) $a^2 + b^2 < 4$ なら $|a| + |b| < 2\sqrt{2} < 3$ だが逆は不成立なので必要条件。(ii) $a = \sqrt[4]{2}, b = -\sqrt[4]{2}$ と $a = \sqrt{2}, b = 0$ が両方向の反例となるので, 必要でも十分でもない。(iii) 方程式は $|(x - a)(x - b)| = 2$ 。常に 2 解をもつ枝に加え, $(x - a)(x - b) = -2$ は $|a - b| \geq 2\sqrt{2}$ で解を増やす。したがって真の条件は $|a - b| < 2\sqrt{2}$ であり, 提示条件は十分だが必要でない。

(2) 各線分の長さは $2\sqrt{\sin^2(\pi/n) + 1/n^2}$ 。よって $S_n = 2n\sqrt{\sin^2(\pi/n) + 1/n^2}$ であり, $S_2 = 2\sqrt{5}$, $S_3 = \sqrt{31}$, $S_6 = 2\sqrt{10}$ 。

(3) $x = 5 + 12k$ とすると $12k \equiv 3 \pmod{29}$ 。 $12^{-1} \equiv 17 \pmod{29}$ より $k \equiv 22 \pmod{29}$, したがって $x = 269 + 348t$ 。1000 未満の自然数は 269, 617, 965 なので, 最小 269, 最大 965 である。