

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2025 年 度 理 工 学 部 数 学

全 3 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 5 ページあり、問題は全部で 3 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n \geq 1$ であることを証明せよ。(2) すべての自然数 n に対し, $a_n^2 - 2$ と $a_{n+1}^2 - 2$ が異符号であることを証明せよ。(3) すべての自然数 n に対し, $|a_{n+1}^2 - 2| \leq \frac{1}{4}|a_n^2 - 2|$ であることを証明せよ。(4) 不等式 $2 - 10^{-6} \leq a_{11}^2 \leq 2$ が成り立つことを証明せよ。

第 2 問

(1) $y = \tan x$ の 1 次の近似式を用いて $\tan 43.5^\circ$ の近似値を求めよ。小数第 3 位を四捨五入すると、 $\tan 43.5^\circ$ は 0.95 である。ただし、 $\pi = 3.14$ として用いてよい。

(2) a を正の実数とする。実数からなる集合 A, B を次で定める。

$$A = \{x \mid |x| < a\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 6x - 19 \leq 0\}.$$

(i) $A \subset B$ となる必要十分条件を求めよ。(ii) $A \supset B$ となる必要十分条件を求めよ。

(3) a を実数とする。方程式 $z^3 - (3 - 2\sqrt{3})z^2 + az + 10\sqrt{3} = 5$ の 3 つの複素数解を複素数平面上に表す。その 3 点を結ぶ図形が 1 辺の長さが 4 の正三角形となるとき、この 3 点を虚部の大きい順に $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ とする。ただし、 z_2 の実部は z_1 の実部より小さい。このとき、

z_1, z_2, z_3 を求めよ。

線分 AB の中点を M とし、 C を中心として A を角 θ だけ回転した点を D とする。ただし、 $0 \leq \theta < \pi$ とする。

(i) C, D, M が同一直線上にあるとき、 D を表す複素数を求めよ。(ii) $\angle MCD = \pi/4$ であるとき、 D を表す複素数を求めよ。

第 3 問

座標空間内において,

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

の表す xy 平面上の領域に, 不透明で厚みの無視できる 1 辺の長さが 1 の正方形の板 P が置いてあり, 点 $L(0, 0, 2)$ に点光源がある。板 P を, x 軸を回転軸として, z 座標が正の側に角 θ だけ回転させたとき, xy 平面上で板 P の影になる領域を D とする。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) D の形状を求めよ。(2) D に属する点の y 座標の最大値を a とする。 a は $\sin \theta = \frac{\text{サ}}{\text{ニ}}$ のとき最大となる。このとき $a = \frac{\text{ヌ}}{\text{ネ}}\sqrt{\text{ノ}}$ であり, 原点から最も遠い D 上の点の x 座標は $\frac{\text{ハ}}{\text{ヒ}}$ である。(3) D の面積は $\sin \theta = \frac{\text{フ}}{\text{ヘ}}$ のとき最大となる。このとき D の面積は $\frac{\text{ホ}}{\text{マ}}\sqrt{\text{ミ}}$ である。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)