

上智大学 2025 年度 理工学部数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n \geq 1$ であることを証明せよ。(2) すべての自然数 n に対し, $a_n^2 - 2$ と $a_{n+1}^2 - 2$ が異符号であることを証明せよ。(3) すべての自然数 n に対し, $|a_{n+1}^2 - 2| \leq \frac{1}{4}|a_n^2 - 2|$ であることを証明せよ。(4) 不等式 $2 - 10^{-6} \leq a_{11}^2 \leq 2$ が成り立つことを証明せよ。

【方針】

(1) は漸化式をそのまま用いて帰納法で下から評価する。 $a_n \geq 1$ を仮定すると $a_{n+1} = (a_n + 2)/(a_n + 1) \geq 1$ がすぐ出る。(2) は $a_{n+1}^2 - 2$ を $a_n^2 - 2$ で表す式を作る。分母を払って整理すると符号が反転する形になる。(3) は (1) により $a_n + 1 \geq 2$ を使い, (2) の式の絶対値を評価する。(4) は (2) で符号が交互に変わることに (3) の縮小率 $1/4$ を 10 回繰り返し, $(1/4)^{10} < 10^{-6}$ を確認して挟み撃ちにする。

【解答】

(1) まず $a_1 = 1 \geq 1$ である。 $a_n \geq 1$ を仮定すると, $a_{n+1} = \frac{a_n + 2}{a_n + 1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1} \geq 1$ である。よって数学的帰納法により, すべての自然数 n について $a_n \geq 1$ が成り立つ。

(2) 漸化式より $a_{n+1}^2 - 2 = \left(\frac{a_n + 2}{a_n + 1}\right)^2 - 2 = \frac{(a_n + 2)^2 - 2(a_n + 1)^2}{(a_n + 1)^2} = \frac{a_n^2 + 4a_n + 4 - 2a_n^2 - 4a_n - 2}{(a_n + 1)^2} = \frac{-a_n^2 + 2}{(a_n + 1)^2} = -\frac{a_n^2 - 2}{(a_n + 1)^2}$. 分母 $(a_n + 1)^2$ は正であるから, $a_{n+1}^2 - 2$ は $a_n^2 - 2$ と異符号である。

(3) (2) の式から $|a_{n+1}^2 - 2| = \frac{|a_n^2 - 2|}{(a_n + 1)^2}$. (1) より $a_n \geq 1$ なので $a_n + 1 \geq 2$, したがって $(a_n + 1)^2 \geq 4$ より $|a_{n+1}^2 - 2| \leq \frac{1}{4}|a_n^2 - 2|$.

(4) まず $a_1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ である。したがって (2) より, $a_{11}^2 - 2$ も負であり, $a_{11}^2 \leq 2$ が従う。さらに (3) を繰り返すと

$$|a_{11}^2 - 2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{10} |a_1^2 - 2| = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

$(1/4)^{10} = 1/2^{20} = 1/1048576 < 10^{-6}$ だから $|a_{11}^2 - 2| < 10^{-6}$. しかも $a_{11}^2 - 2 < 0$ であるので, $0 < 2 - a_{11}^2 < 10^{-6}$ すなわち $2 - 10^{-6} < a_{11}^2 < 2$. 特に求める不等式 $2 - 10^{-6} \leq a_{11}^2 \leq 2$ が成り立つ。

【総評】 (2) では分子の展開で $4a_n$ が打ち消される点を見落としやすい。符号は分母が常に正であることを確認して初めて結論できる。(4) は「異符号」と「縮小率」を独立に使うのが要点で, $(1/4)^{10} < 10^{-6}$ の数値確認も必要である。

【第 2 問】

(1) $y = \tan x$ の 1 次の近似式を用いて $\tan 43.5^\circ$ の近似値を求めよ。小数第 3 位を四捨五入すると、 $\tan 43.5^\circ$ は 0.95 である。ただし、 $\pi = 3.14$ として用いてよい。

(2) a を正の実数とする。実数からなる集合 A, B を次で定める。

$$A = \{x \mid |x| < a\}, \quad B = \{x \mid x^2 - 6x - 19 \leq 0\}.$$

(i) $A \subset B$ となる必要十分条件を求めよ。(ii) $A \cap B$ となる必要十分条件を求めよ。

(3) a を実数とする。方程式 $z^3 - (3 - 2\sqrt{3})z^2 + az + 10\sqrt{3} = 5$ の 3 つの複素数解を複素数平面上に表す。その 3 点を結ぶ図形が 1 辺の長さが 4 の正三角形となるとき、この 3 点を虚部の大きい順に $A(z_1), B(z_2), C(z_3)$ とする。ただし、 z_2 の実部は z_1 の実部より小さい。このとき、

z_1, z_2, z_3 を求めよ。

線分 AB の中点を M とし、 C を中心として A を角 θ だけ回転した点を D とする。ただし、 $0 \leq \theta < \pi$ とする。

(i) C, D, M が同一直線上にあるとき、 D を表す複素数を求めよ。(ii) $\angle MCD = \pi/4$ であるとき、 D を表す複素数を求めよ。

【方針】

(1) は $\tan x$ の微分係数が 1 であることを用いる近似。 $43.5^\circ = 45^\circ - 1.5^\circ$ をラジアンに直して $\tan(\pi/4 - \varepsilon) \approx 1 - 2\varepsilon$ とする。(2) はまず B を平方完成して区間表示し、 $A = (-a, a)$ と比較する。包含の必要十分条件は端点の比較で決まる。(3) は、3 解が正三角形の頂点であることから、1 つを実軸上に置いた標準形で考える。共役な 2 点を含むので、実部・虚部・辺の長さ 4 から 3 点を具体的に定める。後半は中心 C のまわりの回転を複素数で表し、中点条件あるいは角条件を使って回転角を決める。

【解答】

(1) $f(x) = \tan x$ とすると、 $f'(x) = \sec^2 x$ だから $x = \pi/4$ で $f'(\pi/4) = 2$ である。 $43.5^\circ = 45^\circ - 1.5^\circ$ より、 $\varepsilon = 1.5^\circ = \frac{1.5\pi}{180} = \frac{\pi}{120}$ とおくと、

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \approx \tan\frac{\pi}{4} - 2\varepsilon = 1 - \frac{\pi}{60}.$$

$\pi = 3.14$ を用いれば $1 - \frac{3.14}{60} = 1 - 0.052333\dots = 0.947666\dots$ したがって小数第 3 位を四捨五入すると 0.95 である。

(2) まず $x^2 - 6x - 19 \leq 0$ を平方完成すると $(x-3)^2 \leq 28$ より $3-2\sqrt{7} \leq x \leq 3+2\sqrt{7}$ 。したがって $B = [3-2\sqrt{7}, 3+2\sqrt{7}]$ 。一方、 $A = \{x \mid |x| < a\} = (-a, a)$ である。

(i) $A \subset B$ となるには、 $(-a, a)$ のすべての要素が区間 $[3-2\sqrt{7}, 3+2\sqrt{7}]$ に入ればよい。左端は $3-2\sqrt{7} < 0$ であり、 $(-a, a)$ は 0 を含むから、必要なのは $-a \geq 3-2\sqrt{7}$ かつ $a \leq 3+2\sqrt{7}$ である。前者は $a \leq 2\sqrt{7}-3$ と同値であり、これを満たせば後者は自動的に成り立つ。よって必要十分条件は $a \leq 2\sqrt{7}-3$ 。

(ii) $A \cap B$ となるには、 $[3-2\sqrt{7}, 3+2\sqrt{7}] \subset (-a, a)$ であればよい。したがって $-a < 3-2\sqrt{7}$ かつ $3+2\sqrt{7} < a$ 。後者が本質的で、前者はそれより弱い。よって必要十分条件は $a > 3+2\sqrt{7}$ 。

(3) 3 つの解を z_1, z_2, z_3 とする。3 点が 1 辺 4 の正三角形をなすので、その 3 点のうち 1 点は実軸上にあり、他の 2 点は共役になる。したがって、 $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 1-2\sqrt{3}$, $z_3 = 1-2i$ とおける。実際、 z_2 の実部は z_1 の実部より小さいので条件に合う。さらに $z_1 + z_2 + z_3 = (1+2i) + (1-2\sqrt{3}) + (1-2i) = 3-2\sqrt{3}$ であり、係数比較と一致する。また $(z_1 - z_3) = 4i$, $|z_2 - z_1|^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16$ より辺の長さは 4 である。

次に、 $M = \frac{z_1 + z_2}{2} = 1 - \sqrt{3} + i$, $C = z_3 = 1 - 2i$ である。

(i) C, D, M が同一直線上にあるとき、 $M - C = (-\sqrt{3} + 3i)$, $|M - C| = 2\sqrt{3}$ であるから、 D は C から M の方向へ距離 4 だけ進んだ点である。よって $D = C + \frac{4}{|M - C|}(M - C) = 1 - 2i + \frac{2}{\sqrt{3}}(-\sqrt{3} + 3i) = -1 + (2\sqrt{3} - 2)i$ 。

(ii) $\angle MCD = \pi/4$ なら、 $\arg(M - C) = 2\pi/3$ なので $\arg(D - C) = 11\pi/12$ とすればよい。したがって $D = C + 4\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = 1 - 2i + 4\left(-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) = 1 - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2)i$ 。

【総評】 第 2 問 (3) は 3 解の和・積・辺長を同時に照合し、中点 M と中心 C の差ベクトルが正しいかを検算した。第 3 問は回転後の 4 頂点を光源から平面へ中心投影し、台形の上底・下底・高さを別々に確認してから面積を最適化した。第 1 問は反復不等式の縮小率と 11 項目の回数計算が一致することを再確認した。

【第 3 問】

座標空間内において、

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0$$

の表す xy 平面上の領域に、不透明で厚みの無視できる 1 辺の長さが 1 の正方形の板 P が置いてあり、点 $L(0, 0, 2)$ に点光源がある。板 P を、 x 軸を回転軸として、 z 座標が正の側に角 θ だけ回転させたとき、 xy 平面上で板 P の影になる領域を D とする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) D の形状を求めよ。(2) D に属する点の y 座標の最大値を a とする。 a は $\sin \theta = \frac{s}{2}$ のとき最大となる。このとき $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、原点から最も遠い D 上の点の x 座標は $\frac{1}{3}$ である。(3) D の面積は $\sin \theta = \frac{s}{2}$ のとき最大となる。このとき D の面積は $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

【方針】

板の 4 頂点を回転後の座標で表し、光源 L から平面 $z=0$ への中心投影を求める。これにより影の頂点が決まり、 D の形が判定できる。(2) は D の上辺の y 座標を θ の式で表し、 $s = \sin \theta$ において微分する。最大値を与える s を求めたら、そのときの y 最大値と右上頂点の x 座標を代入して計算する。(3) は D が台形であることから、上底・下底・高さを用いて面積を式にする。これも $s = \sin \theta$ の関数として微分し、最大条件を求める。

【解答】

(1) 板 P の 4 頂点を、回転前に $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0)$ とおく。 x 軸まわりに θ 回転すると、 y 成分が $\cos \theta$ 倍、 z 成分が $\sin \theta$ 倍されるので、回転後の頂点は

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, \cos \theta, \sin \theta), (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

である。

点 $L(0, 0, 2)$ から各点への直線を $z=0$ 平面と交わらせる。点 (x, y, z) の投影点を $(X, Y, 0)$ とすると、直線 L と (x, y, z) を結ぶ線分上で $z=0$ となる比から $X = \frac{2x}{2-z}$, $Y = \frac{2y}{2-z}$ である。

したがって 4 頂点の影は

$$(0, 0), (1, 0), \left(\frac{2}{2-\sin \theta}, \frac{2 \cos \theta}{2-\sin \theta} \right), \left(0, \frac{2 \cos \theta}{2-\sin \theta} \right)$$

となる。これらを結んだ図形は、上底と下底が水平な台形である。

(2) D に属する点の y 座標の最大値は、上辺の y 座標 $a = \frac{2 \cos \theta}{2-\sin \theta}$ である。 $s = \sin \theta$ とおくと $a = \frac{2\sqrt{1-s^2}}{2-s}$ 。これを最大化するため、 a^2 を考えると $a^2 = \frac{4(1-s^2)}{(2-s)^2}$ 。分母は正なので、 $g(s) = \frac{1-s^2}{(2-s)^2}$ を最大化すればよい。

微分すると $g'(s) = \frac{-2s(2-s)^2 - (1-s^2) \cdot 2(2-s)(-1)}{(2-s)^4} = \frac{-2s(2-s) + 2(1-s^2)}{(2-s)^3} = \frac{2-4s}{(2-s)^3}$ 。よって $g'(s) = 0$ となるのは $s = 1/2$ のときで、 $0 < s < 1$ で符号は正から負に変わるから最大である。したがって $\sin \theta = \frac{1}{2}$ のとき最大。

このとき

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt{1-(1/2)^2}}{2-1/2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/2}{3/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

また、原点から最も遠い点は右上頂点であり、その x 座標は $\frac{2}{2-\sin \theta} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$ 。

(3) D は下底の長さが 1、上底の長さが $\frac{2}{2-s}$ 、高さが $\frac{2\sqrt{1-s^2}}{2-s}$ の台形である。よって面積 S は $S = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{2-s} \right) \cdot \frac{2\sqrt{1-s^2}}{2-s} = \frac{4-s}{(2-s)^2} \sqrt{1-s^2}$ 。これを最大化する。平方をとって $S^2 = \frac{(4-s)^2(1-s^2)}{(2-s)^4}$ 。微分計算を簡単にするため $h(s) = \log S^2 = 2 \log(4-s) + \log(1-s^2) - 4 \log(2-s)$ とおくと、 $h'(s) = -\frac{2}{4-s} - \frac{2s}{1-s^2} + \frac{4}{2-s}$ 。これを通分して整理すると $h'(s) = \frac{2(3s-2)}{(4-s)(1-s^2)(2-s)}$ となる。分母は $0 < s < 1$ で正なので、臨界点は $s = 2/3$ であり、ここで最大となる。

$$\begin{aligned} \text{したがって } \sin \theta = \frac{2}{3} \text{ のとき面積最大。そのとき } S &= \frac{4 - 2/3}{(2 - 2/3)^2} \sqrt{1 - 4/9} = \frac{10/3}{(4/3)^2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{10}{3} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

よって最大面積は $\frac{5}{8}\sqrt{5}$ である。

【総評】 投影問題では、4 頂点だけを機械的に写すのではなく、中心投影が直線を直線に写すことを確認して、境界のつながりを正しく読む必要がある。最大値問題は a や面積をそのまま微分すると式が重くなるので、 $s = \sin \theta$ に置き、さらに平方や対数微分を使うと整理しやすい。最後に、 $0 < \theta < \pi/2$ の範囲で臨界点が実際に最大かどうかを符号変化で必ず検算する。