

入 学 試 験 問 題

数 学



上 智 大 学 2025 年 度 TEAP2 数 学 (PM)

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

正の実数 a に対し

$$F(a) = \int_0^{1/a} \frac{ae^{-ax}}{1+x} dx$$

とする。

(1) $x \geq 0$ のとき, 任意の自然数 n に対して $1/(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = (-x)^n/(1+x)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)

$$I_k(a) = \int_0^{1/a} a(-x)^k e^{-ax} dx$$

とおく。 $I_0(a), I_1(a)$ を求めよ。

(3) 任意の自然数 n に対して

$$\left| \int_0^{1/a} \frac{a(-x)^n e^{-ax}}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)a^{n+1}}$$

を証明せよ。

(4) $F(10)$ を小数第 3 位まで求め, 誤差が 0.001 未満であることを説明せよ。必要なら $e^{-1} = 0.368$ を用いてよい。

第 2 問

- (1) 3×3 の 9 マスから 1 マス以上を黒く塗り，黒いマスが縦・横・斜めに隣り合わないようにする塗り方は何通りあるか。
- (2) R, G, B からなる長さ N の文字列を無作為に選ぶ。同じ文字が 2 個以上連続する各まとまりを「文字」と「並ぶ個数」の 2 文字に置き換える。この操作で文字列が短くなる確率を $N = 3, 4, 6$ について求めよ。

第 3 問

底面が半径 1 の円，高さ 2 の円筒形のコップに水が満たされている。これを静かに角 θ だけ傾けたときの水面の面積を S ，残る水の体積を V とする。

(1) $\theta = \pi/6$ のときの S, V を求めよ。(2) $0 < \theta < \pi/2$, $\tan \theta = 2$ のときの S, V を求めよ。

第 4 問

面積 20 の正方形 $ABCD$ を底面，面積 15 の合同な二等辺三角形を各側面とする正四角錐 $O-ABCD$ を考える。

(1) 辺 OA の長さを求めよ。(2) OA を $3:1$ に内分する点を P ， OC の中点を Q とする。平面 BPQ と辺 OD の交点を R とするとき， $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OD}$ で表せ。(3) 頂点 A から側面上を進み，辺 OB 上の点を通して辺 OC 上に至る最短経路を ℓ とする。終点を T ， ℓ と OB の交点を S とするとき， ℓ の長さ， $\overrightarrow{OT}$ ， $\overrightarrow{OS}$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)