

上智大学 2025 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 4 問

【第 1 問】

正の実数 a に対し

$$F(a) = \int_0^{1/a} \frac{ae^{-ax}}{1+x} dx$$

とする。

(1) $x \geq 0$ のとき, 任意の自然数 n に対して $1/(1+x) - \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = (-x)^n/(1+x)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)

$$I_k(a) = \int_0^{1/a} a(-x)^k e^{-ax} dx$$

とおく。 $I_0(a), I_1(a)$ を求めよ。(3) 任意の自然数 n に対して

$$\left| \int_0^{1/a} \frac{a(-x)^n e^{-ax}}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{(n+1)a^{n+1}}$$

を証明せよ。

(4) $F(10)$ を小数第 3 位まで求め, 誤差が 0.001 未満であることを説明せよ。必要なら $e^{-1} = 0.368$ を用いてよい。

【方針】

(1) は有限等比級数。(2) は直接積分と部分積分。(3) は $1/(1+x) \leq 1$, $e^{-ax} \leq 1$ で評価する。(4) は $n = 2$ として $F(10) = I_0(10) + I_1(10) +$ 余りに分ける。

【解答】

(1) 有限等比級数より $(1+x) \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = 1 - (-x)^n$ であり, 移項して両辺を $1+x$ で割ればよい。

(2) 直接計算すると $I_0(a) = (1 - e^{-1})/a$ 。また部分積分により $I_1(a) = (2e^{-1} - 1)/a^2$ である。

(3) $x \geq 0$ では $1/(1+x) \leq 1$ かつ $e^{-ax} \leq 1$ だから, 積分の絶対値は

$$\int_0^{1/a} ax^n dx = \frac{1}{(n+1)a^{n+1}}$$

以下である。

(4) (1) で $n = 2$ とすると $F(10) = I_0(10) + I_1(10) + R$, $|R| \leq 1/3000 < 0.001$ である。 $e^{-1} = 0.368$ を用いると $I_0(10) + I_1(10) = 0.0632 - 0.00264 = 0.06056$ なので, 小数第 3 位まで $F(10) = 0.061$ である。

【第 2 問】

(1) 3×3 の 9 マスから 1 マス以上を黒く塗り、黒いマスが縦・横・斜めに隣り合わないようにする塗り方は何通りあるか。

(2) R, G, B からなる長さ N の文字列を無作為に選ぶ。同じ文字が 2 個以上連続する各まとまりを「文字」と「並ぶ個数」の 2 文字に置き換える。この操作で文字列が短くなる確率を $N = 3, 4, 6$ について求めよ。

【方針】

(1) は 9 マスの独立集合を個数別に数える。(2) は 3 個以上の同一文字の連続があるときだけ短くなる。連続長が 1 で終わる列と 2 で終わる列に分け、補集合を漸化式で数える。

【解答】

(1) 黒マス 1 個は 9 通り、2 個は隣接しない組を数えて 16 通り、3 個は 8 通り、4 個は中央を除く 4 隅の 1 通りである。合計は $9 + 16 + 8 + 1 = 34$ 通り。

(2) 連続長が 3 以上の部分があるときに限り短くなる。連続長が 1 で終わる適格列数を A_N 、2 で終わるものを B_N とすると、 $A_{N+1} = 2(A_N + B_N)$ 、 $B_{N+1} = A_N$ 、初期値は $A_1 = 3, B_1 = 0$ である。これより適格列総数は $N = 3, 4, 6$ でそれぞれ 24, 66, 492。したがって求める確率は $1/9, 5/27, 79/243$ である。

【第 3 問】

底面が半径 1 の円、高さ 2 の円筒形のコップに水が満たされている。これを静かに角 θ だけ傾けたときの水面の面積を S 、残る水の体積を V とする。

(1) $\theta = \pi/6$ のときの S, V を求めよ。(2) $0 < \theta < \pi/2$, $\tan \theta = 2$ のときの S, V を求めよ。

【方針】

底面円を $x^2 + y^2 \leq 1$ 、軸方向を $0 \leq z \leq 2$ とする。傾けた後の水面は最も低い飲み口を通る平面 $z = 2 - (x + 1) \tan \theta$ 。水面積は底面への射影面積を $\cos \theta$ で割り、体積は水柱の高さを底面上で積分する。

【解答】

(1) $\tan \theta = 1/\sqrt{3} \leq 1$ なので水面の射影は底面円全体である。よって $S = \pi / \cos \theta = 2\sqrt{3}\pi/3$ 。また円板上で

$$\int x dA = 0$$

だから

$$V = \int (2 - (x + 1)/\sqrt{3}) dA = (2 - \sqrt{3}/3)\pi$$

である。

(2) 水が残る射影は半円 $x \leq 0$ であり、水柱の高さは $-2x$ である。したがって $S = (\pi/2) / \cos \theta = \sqrt{5}\pi/2$ 。また

$$V = \int_{-1}^0 (-2x) 2\sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{3}.$$

【第 4 問】

面積 20 の正方形 $ABCD$ を底面，面積 15 の合同な二等辺三角形を各側面とする正四角錐 $O-ABCD$ を考える。

(1) 辺 OA の長さを求めよ。(2) OA を $3:1$ に内分する点を P ， OC の中点を Q とする。平面 BPQ と辺 OD の交点を R とするとき， $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OD}$ で表せ。(3) 頂点 A から側面上を進み，辺 OB 上の点を通して辺 OC 上に至る最短経路を ℓ とする。終点を T ， ℓ と OB の交点を S とするとき， ℓ の長さ， $\overrightarrow{OT}$ ， $\overrightarrow{OS}$ を求めよ。

【方針】

(1) は側面三角形の高さを求める。(2) は O を原点とし $D = A + C - B$ を使って係数比較する。(3) は側面 OAB, OBC を辺 OB で展開し，点から半直線への最短距離に直す。

【解答】

(1) 底面の一辺は $2\sqrt{5}$ 。側面三角形の高さは $15/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ だから， $OA = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2} = 5\sqrt{2}$ である。

(2) O を原点とすると $D = A + C - B$ ， $P = 3A/4$ ， $Q = C/2$ 。 $R = \lambda D$ が平面 BPQ 上にある条件を係数比較すると $-\lambda + 4\lambda/3 + 2\lambda = 1$ 。よって $\lambda = 3/7$ ，したがって $\overrightarrow{OR} = (3/7)\overrightarrow{OD}$ 。

(3) 側面の頂角を ϕ とすると，余弦定理より $\cos \phi = 4/5$ ， $\sin \phi = 3/5$ 。展開図で OA と OC のなす角は 2ϕ 。垂線の足が T なので， $\ell = OA \sin 2\phi = 24\sqrt{2}/5$ ， $\overrightarrow{OT} = (\cos 2\phi)\overrightarrow{OC} = (7/25)\overrightarrow{OC}$ 。直線と角の二等分線 OB の交点を求めると $\overrightarrow{OS} = (7/20)\overrightarrow{OB}$ である。