

上智大学 2026 年度 経済学部共通数学

解答

全 4 問

【第 1 問】

自然数 n に対し、 $((\sqrt{3}/2)x + 1/2)^n$ を $x^2 + 1$ で割った余りを $R_n(x)$ とする。

(1) $R_2(x), R_3(x)$ を求めよ。(2) $R_{2026}(x)$ を求めよ。

【方針】

剰余環では $x^2 = -1$ 。 $x = i$ とみると $1/2 + i\sqrt{3}/2 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$ なので、余りの係数は 6 周期になる。

【解答】

(1) $x^2 \equiv -1 \pmod{x^2 + 1}$ より $R_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$, $R_3(x) = -1$ 。

(2) 一般に $R_n(x) = \sin(n\pi/3)x + \cos(n\pi/3)$ 。 $2026 \equiv 4 \pmod{6}$ だから $R_{2026}(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$ 。

【第 2 問】

座標空間の $O(0, 0, 0), A(0, 3, 3), B(8, 4, 8)$ に対し、点 P は $OP = AP = BP$ を満たして動く。

(1) $\angle AOB$ の余弦を求めよ。(2) 三角形 OAB の面積を求めよ。(3) P の軌跡を、通る 1 点と方向ベクトルで表せ。(4) P が xy 平面上にあるとき、四面体 $OABP$ の体積を求めよ。

【方針】

等距離条件は平方して一次方程式 2 本にする。その交線を求め、 $z = 0$ として特定の P を得る。面積と体積は内積と座標成分で計算する。

【解答】

(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 36$, $|\vec{OA}| = 3\sqrt{2}, |\vec{OB}| = 12$ より $\cos \angle AOB = \sqrt{2}/2$ 。

(2) 面積は $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{OA}|^2|\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = 18$ 。

(3) $OP = AP$ から $y + z = 3$, $OP = BP$ から $2x + y + 2z = 18$ 。したがって軌跡は $(6, 0, 3)$ を通り、方向ベクトル $(1, 2, -2)$ に平行な直線。

(4) $z = 0$ なら $P = (15/2, 3, 0)$ 。底面 OAB と点 P の座標から体積を成分計算すると $|12x + 24y - 24z|/6 = 27$ 。

【第 3 問】

原点中心、半径 2 の円上の点を $P(a, b) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ とする。

(1) $a + b$ の最小値と最大値を求めよ。(2) $ab + a + b$ の最小値と最大値を求めよ。(3) $\cos 4\theta - b^2$ の最小値と最大値を求めよ。(4) $a + b$ が最大となる点について、直線 $y = 3x/2$ と $y = (b/a)x + 1$ のなす角を α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) とする。 $\tan 2\alpha$ を求めよ。

【方針】

(1) は三角関数の合成。(2) は $u = \cos \theta + \sin \theta$, (3) は $v = \cos 2\theta$ と置いて 2 次式の範囲にする。(4) は傾きから $\tan \alpha$ を求める。

【解答】

(1) $a + b = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ より最小 $-2\sqrt{2}$, 最大 $2\sqrt{2}$ 。

(2) $u = \cos \theta + \sin \theta \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ とすると $ab + a + b = 2u^2 + 2u - 2$ 。よって最小 $-5/2$, 最大 $2 + 2\sqrt{2}$ 。

(3) $v = \cos 2\theta \in [-1, 1]$ とすると $\cos 4\theta - b^2 = 2v^2 + 2v - 3$ 。よって最小 $-7/2$, 最大 1。

(4) 最大点では $a = b = \sqrt{2}$, 2 直線の傾きは $3/2, 1$ 。したがって $\tan \alpha = (3/2 - 1)/(1 + 3/2) = 1/5$, ゆえに $\tan 2\alpha = 5/12$ 。

【第 4 問】

2 曲線 $C_1: y = -x^2 - 2x + 3$, $C_2: y = -x^2 + 2x$ を考える。

(1) 両方に接する直線 ℓ の方程式を求めよ。(2) C_1, C_2, ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。(3) $D_1: y \leq -x^2 - 2x + 3$, $D_2: y \leq -x^2 + 2x$ とし, $E = D_1 \cup D_2$ 内で $mx + y$ の最大値を M とする。 M を m の式で表せ。

【方針】

傾き p の接線の切片を各放物線で表して一致させる。面積は接線との差が接点からの平方になることを使う。(3) は各領域での最大値を平方完成し, 大きい方を選ぶ。

【解答】

(1) $y = px + q$ が $y = -x^2 + hx + k$ に接する条件は $q = k + (h - p)^2/4$ 。2 曲線で切片を等しくすると $p = -3/2$, $q = 49/16$ 。よって $\ell: y = -3x/2 + 49/16$ 。

(2) 接点の x 座標は C_1 で $-1/4$, C_2 で $7/4$, 2 曲線の交点は $x = 3/4$ 。接線との差は各々 $(x + 1/4)^2, (x - 7/4)^2$ だから, 面積は $1/3 + 1/3 = 2/3$ 。

(3) D_1 での最大値は $(m^2 - 4m + 16)/4$, D_2 では $(m^2 + 4m + 4)/4$ 。前者が後者以上となるのは $m \leq 3/2$ 。したがって

$$M = \begin{cases} (m^2 - 4m + 16)/4, & m \leq 3/2, \\ (m^2 + 4m + 4)/4, & m > 3/2. \end{cases}$$