

上智大学 2026 年度 理工学部数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

0 でない複素数 z の絶対値を r , 偏角を θ とする。 $w = z + \frac{1}{z}$ の実部を u , 虚部を v とおく。

(1) u, v を r, θ を用いて表せ。

(2) (i) 複素数 z が円 $|z| = 2 + \sqrt{3}$ の全体を動くとき, 複素数平面上で点 w が描く曲線を求めよ。

(ii) t が正の実数全体を動くとき, 複素数 $z = t(1 + i)$ に対応する点 w が描く曲線を求めよ。

(iii) (i) の曲線と (ii) の曲線の第 1 象限にある交点を P とする。 P におけるそれぞれの接線の傾きを求めよ。

(3) 複素数平面上で (2) の 2 曲線で囲まれ, かつ原点を含まない図形を, 虚軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【方針】

$z = re^{i\theta}$ において $z + 1/z$ の実部虚部を整理する。(2) は u, v の関係式に直し, (i) は楕円, (ii) は双曲線として識別する。交点は連立して求め, 接線の傾きは得られた関係式を微分して算出する。(3) は虚軸回転なので, v を変数にして円板の差として体積積分を立てる。

【解答】

(1) $z = re^{i\theta}$ より $\frac{1}{z} = r^{-1}e^{-i\theta}$ だから $w = (r + r^{-1})\cos\theta + i(r - r^{-1})\sin\theta$ である。よって $u = (r + r^{-1})\cos\theta$, $v = (r - r^{-1})\sin\theta$ 。

(2)(i) $|z| = 2 + \sqrt{3}$ より $r = 2 + \sqrt{3}$ である。このとき $r + r^{-1} = 4$, $r - r^{-1} = 2\sqrt{3}$ となるので $u = 4\cos\theta$, $v = 2\sqrt{3}\sin\theta$ 。したがって $\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ となる。よって曲線 C_1 は原点中心の楕円である。

(2)(ii) $z = t(1 + i)$, $t > 0$ より偏角は常に $\pi/4$ である。したがって $u = \frac{r + r^{-1}}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{r - r^{-1}}{\sqrt{2}}$ であり, これより $u^2 - v^2 = 2$ を得る。しかも $u > 0$ なので, 曲線 C_2 は双曲線 $u^2 - v^2 = 2$ の $u > 0$ 側の枝である。

(2)(iii) 交点では

$$\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad u^2 - v^2 = 2$$

を満たす。後者を前者に代入すると $\frac{u^2}{16} + \frac{u^2 - 2}{12} = 1$ より $7u^2 = 56$ となるから $u^2 = 8$, $v^2 = 6$ 。第 1 象限の交点は $P = (2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ である。

楕円 C_1 について $\frac{u}{16}du + \frac{v}{12}dv = 0$ より $\frac{dv}{du} = -\frac{3u}{4v}$ だから, P での傾きは $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。双曲線 C_2 について $2u - 2v\frac{dv}{du} = 0$ より $\frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$ だから, P での傾きは $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

(3) 楕円は $\frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{12} = 1 \Rightarrow u^2 = 16 - \frac{4v^2}{3}$ であり, 双曲線の右枝は $u^2 - v^2 = 2 \Rightarrow u^2 = v^2 + 2$ である。囲まれる図形を虚軸のまわりに回転すると, 半径は u なので体積は

$$\pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left\{ \left(16 - \frac{4v^2}{3} \right) - (v^2 + 2) \right\} dv$$

となる。計算して

$$\pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(14 - \frac{7v^2}{3} \right) dv = \frac{56}{3}\sqrt{6}\pi$$

を得る。

【第 2 問】

(1) $1.2\alpha + 1.6 = e^\alpha$ を満たす正の実数 α の近似値を、 $y = e^x$ のグラフを $x = 1$ における接線で近似することにより、小数第 2 位まで求めよ。ただし、 $e = 2.72$ という近似値を用いてよい。

(2) 大小のボールを投げて的に当てるゲームを行う。的の前には柵がある。大きなボールは柵を通り抜ける確率が $\frac{1}{3}$ で、通り抜けた場合に的に当たる確率が $\frac{1}{2}$ である。小さなボールは柵を通り抜ける確率が $\frac{3}{4}$ で、通り抜けた場合に的に当たる確率が $\frac{1}{5}$ である。大きなボールが的に当たったときの賞金は 270 円、小さなボールが的に当たったときの賞金は 280 円である。

(i) 大きなボールを 1 回投げたときに得られる賞金の期待値と、小さなボールを 1 回投げたときに得られる賞金の期待値を求めよ。

(ii) ボールを 2 回投げる。1 回目は大きなボールを投げ、それが柵を通り抜けなかったら 2 回目は小さなボールを投げる。1 回目のボールが柵を通り抜けたら、2 回目も大きなボールを投げる。得られる賞金総額の期待値を求めよ。また、2 回目に投げたボールが的に当たったとき、それが大きなボールである確率を求めよ。

【方針】

(1) は $x = 1$ での接線を作り、その直線と $1.2x + 1.6$ の交点を近似解とする。(2)(i) は「当たる確率 $\times$ 賞金」で期待値を求める。(ii) は 1 回目の成否で 2 回目のボール種が変わるので場合分けして期待値を足し、最後は条件付き確率を求める。

【解答】

(1) $f(x) = e^x$ とおくと、 $x = 1$ で $f(1) = e \approx 2.72$, $f'(1) = e \approx 2.72$ である。よって $x = 1$ における接線は $y - 2.72 = 2.72(x - 1)$ すなわち $y = 2.72x$ である。これで $e^\alpha = 1.2\alpha + 1.6$ を近似すると $2.72\alpha = 1.2\alpha + 1.6$ より $1.52\alpha = 1.6$ となるから $\alpha \approx \frac{1.6}{1.52} \approx 1.0526 \dots$ したがって、小数第 2 位までで $\alpha \approx 1.05$ である。

(2)(i) 大きなボールが的に当たる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ なので期待値は $270 \cdot \frac{1}{6} = 45$ 円である。小さなボールが的に当たる確率は $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ なので期待値は $280 \cdot \frac{3}{20} = 42$ 円である。

(2)(ii) 1 回目は大きなボールなので、1 回目の期待値は 45 円である。1 回目が通り抜けた確率は $\frac{1}{3}$ であり、そのとき 2 回目も大きなボールなので 2 回目の期待値は 45 円である。1 回目が通り抜けなかった確率は $\frac{2}{3}$ であり、そのとき 2 回目は小さなボールなので 2 回目の期待値は 42 円である。したがって総額の期待値は $45 + \frac{1}{3} \cdot 45 + \frac{2}{3} \cdot 42 = 88$ 円である。

次に、2 回目に投げたボールが的に当たったとき、それが大きなボールである確率を求める。2 回目が大きなボールであるのは 1 回目が通り抜けたときだけなので、その確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき 2 回目が的に当たる確率は $\frac{1}{6}$ だから、「2 回目が大きなボールで、かつ的に当たる」確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ である。一方、2 回目に投げたボールが的に当たる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{20} = \frac{7}{45}$ である。よって求める確率は $\frac{1/18}{7/45} = \frac{5}{14}$ である。

【第 3 問】

1 辺の長さが 1 である立方体 $OADB - CFGE$ を考える。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。辺 BD の中点を P , 辺 FG の中点を Q とし, 3 点 O, P, Q を通る平面 α で立方体を切断する。

- (1) 断面の形を答えよ。
- (2) 平面 α と直線 CF との交点を R とするとき, $\overrightarrow{CR}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。
- (3) 平面 α と直線 DG との交点を S とするとき, $\overrightarrow{DS}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (4) 平面 α と直線 EG との交点を T とするとき, $\overrightarrow{ET}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。
- (5) 断面の面積を求めよ。
- (6) 切断されてできる 2 つの立体のうち, 頂点 A を含むものの体積を V_1 , 頂点 A を含まないものの体積を V_2 とするとき, V_1/V_2 を求めよ。

【方針】

立方体を座標化し, $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ とおく。すると $D = (1, 1, 0)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$, $E = (0, 1, 1)$ であり, P, Q の座標も定まる。平面方程式を出して各辺との交点比を求め, 断面多角形の頂点列を確定する。面積は平面内の座標に直して求め, 体積比は平面の上下に分けて体積を積分する。

【解答】

(1) 座標を $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ とおくと, $D = (1, 1, 0)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$, $E = (0, 1, 1)$ である。中点 P, Q は $P = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, $Q = (1, \frac{1}{2}, 1)$ である。

平面 α は O, P, Q を通るから, 方程式を $ax + by + cz = 0$ とおくと, P, Q を代入して $\frac{a}{2} + b = 0$, $a + \frac{b}{2} + c = 0$ を得る。これより $a = -4$, $b = 2$, $c = 3$ の比が得られるので, 平面 α の方程式は $4x - 2y - 3z = 0$ である。

この平面は立方体と 5 点で交わるので, 断面は五角形である。断面の頂点は順に O, P, S, Q, R である。

(2) 直線 CF 上の点は $(t, 0, 1)$ と表せる。これを平面方程式に代入すると $4t - 3 = 0$ より $t = \frac{3}{4}$ である。したがって $\overrightarrow{CR} = \frac{3}{4}\vec{a}$ である。

(3) 直線 DG 上の点は $(1, 1, s)$ と表せる。平面方程式に代入すると $4 - 2 - 3s = 0$ より $s = \frac{2}{3}$ である。したがって $\overrightarrow{DS} = \frac{2}{3}\vec{c}$ である。

(4) 直線 EG 上の点は $(t, 1, 1)$ と表せる。平面方程式に代入して $4t - 2 - 3 = 0$ より $t = \frac{5}{4}$ である。したがって $\overrightarrow{ET} = \frac{5}{4}\vec{a}$ である。

(5) 平面 $4x - 2y - 3z = 0$ を $x = \frac{2y + 3z}{4}$ とみる。 yz 平面への射影を考えると, 断面の射影図形は

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (0, 1)$$

を頂点とする五角形であり, その面積は $\frac{11}{12}$ である。また

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{29}}{4}$$

だから, 断面積は $\frac{11}{12} \cdot \frac{\sqrt{29}}{4} = \frac{11\sqrt{29}}{48}$ である。

(6) 頂点 $A = (1, 0, 0)$ は $4x - 2y - 3z \geq 0$ を満たす側にある。したがって A を含む立体の体積は

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{2y + 3z}{4}\right) dy dz$$

である。計算すると

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2} - \frac{3z}{4}\right) dy dz = \frac{3}{8}$$

となる。よって $V_2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ であるから $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$ である。