

上智大学 2026 年度 理工学部数学

解答

全 3 問

【第 1 問】

0 でない複素数 z の絶対値を r , 偏角を θ とする。 $w = z + \frac{1}{z}$ の実部を u , 虚部を v とおく。

(1) u, v を r, θ を用いて表せ。

(2) (i) 複素数 z が円 $|z| = 2 + \sqrt{3}$ の全体を動くとき, 複素数平面上で点 w が描く曲線を求めよ。

(ii) t が正の実数全体を動くとき, 複素数 $z = t(1+i)$ に対応する点 w が描く曲線を求めよ。

(iii) (i) の曲線と (ii) の曲線の第 1 象限にある交点を P とする。 P におけるそれぞれの接線の傾きを求めよ。

(3) 複素数平面上で (2) の 2 曲線で囲まれ, かつ原点を含まない図形を, 虚軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

【方針】

$z = re^{i\theta}$ において $z + 1/z$ の実部虚部を整理する。(2) は u, v の関係式に直し, (i) は楕円, (ii) は双曲線として識別する。交点は連立して求め, 接線の傾きは得られた関係式を微分して算出する。(3) は虚軸回転なので, v を変数にして円板の差として体積積分を立てる。

【解答】

(1) $z = re^{i\theta}$ より $\frac{1}{z} = r^{-1}e^{-i\theta}$ だから $w = (r + r^{-1})\cos\theta + i(r - r^{-1})\sin\theta$ である。よって $u = (r + r^{-1})\cos\theta$, $v = (r - r^{-1})\sin\theta$ 。

(2)(i) $|z| = 2 + \sqrt{3}$ より $r = 2 + \sqrt{3}$ である。このとき $r + r^{-1} = 4$, $r - r^{-1} = 2\sqrt{3}$ となるので $u = 4\cos\theta$, $v = 2\sqrt{3}\sin\theta$ 。したがって $\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ となる。よって曲線 C_1 は原点中心の楕円である。

(2)(ii) $z = t(1+i)$, $t > 0$ より偏角は常に $\pi/4$ である。したがって $u = \frac{r+r^{-1}}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{r-r^{-1}}{\sqrt{2}}$ であり, これより $u^2 - v^2 = 2$ を得る。しかも $u > 0$ なので, 曲線 C_2 は双曲線 $u^2 - v^2 = 2$ の $u > 0$ 側の枝である。

(2)(iii) 交点では

$$\left(\frac{u}{4}\right)^2 + \left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad u^2 - v^2 = 2$$

を満たす。後者を前者に代入すると $\frac{u^2}{16} + \frac{u^2 - 2}{12} = 1$ より $7u^2 = 56$ となるから $u^2 = 8$, $v^2 = 6$ 。第 1 象限の交点は $P = (2\sqrt{2}, \sqrt{6})$ である。

楕円 C_1 について $\frac{u}{16}du + \frac{v}{12}dv = 0$ より $\frac{dv}{du} = -\frac{3u}{4v}$ だから, P での傾きは $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。双曲線 C_2 について $2u - 2v\frac{dv}{du} = 0$ より $\frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$ だから, P での傾きは $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

(3) 楕円は $\frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{12} = 1 \Rightarrow u^2 = 16 - \frac{4v^2}{3}$ であり, 双曲線の右枝は $u^2 - v^2 = 2 \Rightarrow u^2 = v^2 + 2$ である。囲まれる図形を虚軸のまわりに回転すると, 半径は u なので体積は

$$\pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left\{ \left(16 - \frac{4v^2}{3} \right) - (v^2 + 2) \right\} dv$$

となる。計算して

$$\pi \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(14 - \frac{7v^2}{3} \right) dv = \frac{56}{3}\sqrt{6}\pi$$

を得る。

【総評】 (2)(ii) では $z = t(1+i)$ の偏角が常に $\pi/4$ であることを確認する。交点 P は楕円と双曲線の連立から $u^2 = 8$, $v^2 = 6$ と一意に定まる。回転体は虚軸回りなので半径を u として積分を組む点を取り違えないよう検算する。

【第 2 問】

(1) $1.2\alpha + 1.6 = e^\alpha$ を満たす正の実数 α の近似値を、 $y = e^x$ のグラフを $x = 1$ における接線で近似することにより、小数第 2 位まで求めよ。ただし、 $e = 2.72$ という近似値を用いてよい。

(2) 大小のボールを投げて的に当てるゲームを行う。的の前には柵がある。大きなボールは柵を通り抜ける確率が $\frac{1}{3}$ で、通り抜けた場合に的に当たる確率が $\frac{1}{2}$ である。小さなボールは柵を通り抜ける確率が $\frac{3}{4}$ で、通り抜けた場合に的に当たる確率が $\frac{1}{5}$ である。大きなボールが的に当たったときの賞金は 270 円、小さなボールが的に当たったときの賞金は 280 円である。

(i) 大きなボールを 1 回投げたときに得られる賞金の期待値と、小さなボールを 1 回投げたときに得られる賞金の期待値を求めよ。

(ii) ボールを 2 回投げる。1 回目は大きなボールを投げ、それが柵を通り抜けなかったら 2 回目は小さなボールを投げる。1 回目のボールが柵を通り抜けたら、2 回目も大きなボールを投げる。得られる賞金総額の期待値を求めよ。また、2 回目に投げたボールが的に当たったとき、それが大きなボールである確率を求めよ。

【方針】

(1) は $x = 1$ での接線を作り、その直線と $1.2x + 1.6$ の交点を近似解とする。(2)(i) は「当たる確率 $\times$ 賞金」で期待値を求める。(ii) は 1 回目の成否で 2 回目のボール種が変わるので場合分けして期待値を足し、最後は条件付き確率を求める。

【解答】

(1) $f(x) = e^x$ とおくと、 $x = 1$ で $f(1) = e \approx 2.72$, $f'(1) = e \approx 2.72$ である。よって $x = 1$ における接線は $y - 2.72 = 2.72(x - 1)$ すなわち $y = 2.72x$ である。これで $e^\alpha = 1.2\alpha + 1.6$ を近似すると $2.72\alpha = 1.2\alpha + 1.6$ より $1.52\alpha = 1.6$ となるから $\alpha \approx \frac{1.6}{1.52} \approx 1.0526\dots$ したがって、小数第 2 位までで $\alpha \approx 1.05$ である。

(2)(i) 大きなボールが的に当たる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ なので期待値は $270 \cdot \frac{1}{6} = 45$ 円である。小さなボールが的に当たる確率は $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ なので期待値は $280 \cdot \frac{3}{20} = 42$ 円である。

(2)(ii) 1 回目は大きなボールなので、1 回目の期待値は 45 円である。1 回目が通り抜けた確率は $\frac{1}{3}$ であり、そのとき 2 回目も大きなボールなので 2 回目の期待値は 45 円である。1 回目が通り抜けなかった確率は $\frac{2}{3}$ であり、そのとき 2 回目は小さなボールなので 2 回目の期待値は 42 円である。したがって総額の期待値は $45 + \frac{1}{3} \cdot 45 + \frac{2}{3} \cdot 42 = 88$ 円である。

次に、2 回目に投げたボールが的に当たったとき、それが大きなボールである確率を求める。2 回目が大きなボールであるのは 1 回目が通り抜けたときだけなので、その確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき 2 回目が的に当たる確率は $\frac{1}{6}$ だから、「2 回目が大きなボールで、かつ的に当たる」確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ である。一方、2 回目に投げたボールが的に当たる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{20} = \frac{7}{45}$ である。よって求める確率は $\frac{1/18}{7/45} = \frac{5}{14}$ である。

【総評】 (1) は接線の式を立てた後の一次方程式を正しく解けているかを確認する。近似値は $1.0526\dots$ なので小数第 2 位まで 1.05 でよい。(2)(ii) は 2 回目のボール種で場合分けすることが要点で、期待値と条件付き確率の分母を取り違えないことを再検算する。

【第 3 問】

1 辺の長さが 1 である立方体 $OADB - CFGE$ を考える。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。辺 BD の中点を P , 辺 FG の中点を Q とし, 3 点 O, P, Q を通る平面 α で立方体を切断する。

(1) 断面の形を答えよ。

(2) 平面 α と直線 CF との交点を R とするとき, $\overrightarrow{CR}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(3) 平面 α と直線 DG との交点を S とするとき, $\overrightarrow{DS}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ。

(4) 平面 α と直線 EG との交点を T とするとき, $\overrightarrow{ET}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(5) 断面の面積を求めよ。

(6) 切断されてできる 2 つの立体のうち, 頂点 A を含むものの体積を V_1 , 頂点 A を含まないものの体積を V_2 とするとき, V_1/V_2 を求めよ。

【方針】

立方体を座標化し, $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ とおく。すると $D = (1, 1, 0)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$, $E = (0, 1, 1)$ であり, P, Q の座標も定まる。平面方程式を出して各辺との交点比を求め, 断面多角形の頂点列を確定する。面積は平面内の座標に直して求め, 体積比は平面の上下に分けて体積を積分する。

【解答】

(1) 座標を $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ とおくと, $D = (1, 1, 0)$, $F = (1, 0, 1)$, $G = (1, 1, 1)$, $E = (0, 1, 1)$ である。中点 P, Q は $P = (\frac{1}{2}, 1, 0)$, $Q = (1, \frac{1}{2}, 1)$ である。

平面 α は O, P, Q を通るから, 方程式を $ax + by + cz = 0$ とおくと, P, Q を代入して $\frac{a}{2} + b = 0$, $a + \frac{b}{2} + c = 0$ を得る。これより $a = -4$, $b = 2$, $c = 3$ の比が得られるので, 平面 α の方程式は $4x - 2y - 3z = 0$ である。

この平面は立方体と 5 点で交わるので, 断面は五角形である。断面の頂点は順に O, P, S, Q, R である。

(2) 直線 CF 上の点は $(t, 0, 1)$ と表せる。これを平面方程式に代入すると $4t - 3 = 0$ より $t = \frac{3}{4}$ である。したがって $\overrightarrow{CR} = \frac{3}{4}\vec{a}$ である。

(3) 直線 DG 上の点は $(1, 1, s)$ と表せる。平面方程式に代入すると $4 - 2 - 3s = 0$ より $s = \frac{2}{3}$ である。したがって $\overrightarrow{DS} = \frac{2}{3}\vec{c}$ である。

(4) 直線 EG 上の点は $(t, 1, 1)$ と表せる。平面方程式に代入して $4t - 2 - 3 = 0$ より $t = \frac{5}{4}$ である。したがって $\overrightarrow{ET} = \frac{5}{4}\vec{a}$ である。

(5) 平面 $4x - 2y - 3z = 0$ を $x = \frac{2y + 3z}{4}$ とみる。 yz 平面への射影を考えると, 断面の射影図形は

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (0, 1)$$

を頂点とする五角形であり, その面積は $\frac{11}{12}$ である。また

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{29}}{4}$$

だから, 断面積は $\frac{11}{12} \cdot \frac{\sqrt{29}}{4} = \frac{11\sqrt{29}}{48}$ である。

(6) 頂点 $A = (1, 0, 0)$ は $4x - 2y - 3z \geq 0$ を満たす側にある。したがって A を含む立体の体積は

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{2y + 3z}{4}\right) dy dz$$

である。計算すると

$$V_1 = \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{2} - \frac{3z}{4}\right) dy dz = \frac{3}{8}$$

となる。よって $V_2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ であるから $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$ である。

【総評】 第 3 問は立方体の頂点对応を最初に固定し, 平面方程式を一貫して使うのが要点である。中点 P は BD の中点なので座標は $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ と再確認する。断面は五角形で, 辺 CF, DG, EG の交点比はそれぞれ $3/4, 2/3, 5/4$ と独立に検算できる。面積は射影面積に面素係数 $\sqrt{29}/4$ を掛ける。体積比は半空間 $4x - 2y - 3z \geq 0$ で積分し, $3/5$ になる。