

上智大学 2026 年度 TEAP2 数学 (PM)

解答

全 3 問

【第 1 問】

実数全体で定義された実数値関数 f が $f(0) > 0$ および $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$ を満たす。

(1) $f(0) = 1$ を証明せよ。(2) 任意の実数 x に対して $f(x) \geq -1$ を証明せよ。(3) $f(a) = 1 + b$ を満たす実数 a と正の実数 b があるなら、 $f(2^n a) \geq 1 + 4^n b$ を証明せよ。(4) f に最大値 M が存在するなら $M = 1$ であることを証明せよ。

【方針】

(1) は $x = 0$ を代入。(2) は $x/2$ に条件式を使う。(3) は帰納法。(4) は $M > 1$ と仮定して (3) で上に有界でないことを導く。

【解答】

(1) $c = f(0)$ とすると $c = 2c^2 - 1$, すなわち $(c - 1)(2c + 1) = 0$. $c > 0$ より $c = 1$.

(2) 条件式を $x/2$ に用いると $f(x) = 2f(x/2)^2 - 1 \geq -1$.

(3) $n = 0$ では仮定そのもの。 $f(2^n a) \geq 1 + 4^n b > 1$ とすると

$$f(2^{n+1}a) = 2f(2^n a)^2 - 1 \geq 2(1 + 4^n b)^2 - 1 \geq 1 + 4^{n+1}b.$$

よって帰納法で成立する。

(4) $f(0) = 1$ より $M \geq 1$. もし $M > 1$ なら、最大値をとる点 a で $M = 1 + b$ ($b > 0$) と書ける。(3) により $f(2^n a) \geq 1 + 4^n b$ は M を超えるので矛盾。したがって $M = 1$.

【第 2 問】

(1) 4 頂点を結ぶ完全グラフの 6 辺に 1 から 6 の番号を付ける。さいころを振り、出た番号の辺を実線にする。既の実線なら変化しない。(i) 2 回で端点を共有しない 2 辺ができる確率, (ii) 3 回で三角形ができる確率, (iii) 4 回で三角形を含む図形ができる確率を求めよ。

(2) $1/\log 5 = 0.62$ と 1 次近似を用いて $\log_5 23$ を求め、小数第 3 位を四捨五入せよ。ここで $\log$ は自然対数とする。

(3) 実数 a に対し $x^2 + (a + i)x + 1 + 2i = 0$ を満たす実数 x が存在するための a の条件を求めよ。

【方針】

(1) K_4 の向かい合う辺と 4 個の三角形を数える。(2) $23 = 25(1 - 2/25)$ として $\log(1 + u) \simeq u$ を使う。(3) 実部と虚部をそれぞれ 0 にする。

【解答】

(1) (i) 向かい合う辺の組は 3 組で、順序を含め 6 通りだから $6/36 = 1/6$. (ii) 三角形は 4 個、各辺の出る順序は 6 通りなので $24/6^3 = 1/9$. (iii) 固定した三角形について、4 回がその 3 辺だけで全てを含む 36 通りに、残る 3 辺のいずれかが 1 回出る 72 通りを加えて 108 通り。4 三角形は同時には成立しないので $4 \cdot 108/6^4 = 1/3$.

(2) $\log_5 23 = 2 + \log(1 - 2/25)/\log 5 \simeq 2 - 0.62 \cdot 2/25 = 1.9504$. よって 1.95.

(3) 虚部から $x + 2 = 0$, よって $x = -2$. 実部 $x^2 + ax + 1 = 0$ に代入すると $5 - 2a = 0$. したがって必要十分条件は $a = 5/2$.

【第 3 問】

$1/2 \leq t \leq \sqrt{3}/2$ とし、点 P の座標を $(\log(t/\sqrt{1-t^2}), \sqrt{1-t^2}/t)$ とする。軌跡を C とする。

(1) $t = \sqrt{3}/3$ における速度ベクトルを求めよ。(2) C の長さを求めよ。(3) P を通る y 軸に平行な直線と x 軸の交点を Q とする。線分 PQ が通過する部分の面積を求めよ。

【方針】

$x = \log(t/\sqrt{1-t^2})$ とおくと $y = e^{-x}$ となり、端点は $x = \pm \log \sqrt{3}$ 。速度だけは t で微分し、弧長と面積は x 表示で計算する。

【解答】

(1) $x' = 1/(t(1-t^2))$, また $y' = -y/(t(1-t^2))$ 。 $t = \sqrt{3}/3$ では $y = \sqrt{2}$ なので、速度ベクトルは $(3\sqrt{3}/2, -3\sqrt{6}/2)$ 。

(2) $y = e^{-x}$, $x \in [-\log \sqrt{3}, \log \sqrt{3}]$ 。 $y = e^{-x}$ と置換すると弧長は

$$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}/y \, dy$$

。計算して

$$2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \log \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right).$$

(3) 通過部分は曲線の下側なので、面積は

$$\int_{-\log \sqrt{3}}^{\log \sqrt{3}} e^{-x} \, dx = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$$

。