

東北大学 1984 年度 理系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 3 問】

正の数 α , β , m , n が次の条件を満たしている.

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \tan \alpha = \frac{1}{m}, \quad \tan \beta = \frac{1}{n}$$

- (1) m を用いて n を表せ.
 (2) m , n がともに整数であるとき, m と n を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

条件 $2\alpha + \beta = \pi/4$ から $\beta = \pi/4 - 2\alpha$ とし, $\tan 2\alpha$ と $\tan(\pi/4 - 2\alpha)$ を加法定理で表す. (2) では $\beta > 0$ から分母が正であることを確認し, $n = 1 + 4m/(m^2 - 2m - 1)$ と変形して, 正の整数候補を有限個に絞る.

【解答】

(1) $\tan \alpha = \frac{1}{m}$ であるから

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2/m}{1 - 1/m^2} = \frac{2m}{m^2 - 1}$$

である. また $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$ なので

$$\tan \beta = \tan \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right) = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$$

である. これに上の式を代入して

$$\tan \beta = \frac{1 - \frac{2m}{m^2 - 1}}{1 + \frac{2m}{m^2 - 1}} = \frac{m^2 - 2m - 1}{m^2 + 2m - 1}$$

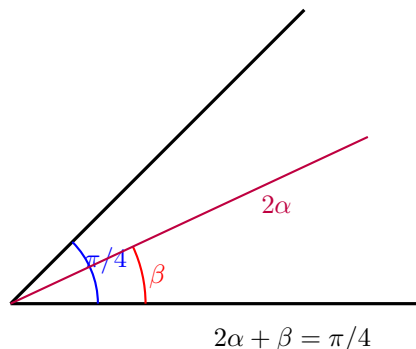
となる. 一方, $\tan \beta = 1/n$ であるから $\frac{1}{n} = \frac{m^2 - 2m - 1}{m^2 + 2m - 1}$ であり, $n = \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 - 2m - 1}$ である.

(2) $\beta > 0$ だから $\tan \beta > 0$ である. したがって (1) の分母 $m^2 - 2m - 1$ は正でなければならない. 特に整数 m について $m \geq 3$ である. また $n = \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 - 2m - 1} = 1 + \frac{4m}{m^2 - 2m - 1}$ である. n が整数となるには, 正の整数 $m^2 - 2m - 1$ が $4m$ を割り切る必要がある. 特に $m^2 - 2m - 1 \leq 4m$ である. すなわち $m^2 - 6m - 1 \leq 0$ だから, $m \geq 3$ と合わせて $m = 3, 4, 5, 6$ だけを調べればよい.

実際に計算すると

m	3	4	5	6
$m^2 - 2m - 1$	2	7	14	23
n	7	23/7	17/7	47/23

である. したがって整数となるのは $m = 3$, $n = 7$ だけである.



加法定理で $\tan \beta$ を m の有理式に直し, 整数条件を調べる

▶ 解法 2

【方針】

(1) 加法定理から n の式を得る。(2) $d = m^2 - 2m - 1$ とおくと、整数条件は $d \mid 4m$ である。一方 $d \equiv -1 \pmod{m}$ なので d と m は互いに素であり、 $d \mid 4$ まで絞れる。

【解答】

(1)

$$\tan 2\alpha = \frac{2/m}{1 - 1/m^2} = \frac{2m}{m^2 - 1}.$$

$\beta = \pi/4 - 2\alpha$ だから

$$\frac{1}{n} = \tan \beta = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha} = \frac{m^2 - 2m - 1}{m^2 + 2m - 1}.$$

よって

$$n = \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 - 2m - 1}.$$

(2) $\beta > 0$ より分母は正で、整数 m について $m \geq 3$ である。ここで

$$d = m^2 - 2m - 1$$

とおくと

$$n = 1 + \frac{4m}{d}.$$

n が整数なら $d \mid 4m$ である。一方

$$d \equiv -1 \pmod{m}$$

だから d と m は互いに素である。したがって $d \mid 4$ でなければならない。

$d > 0$ なので $d = 1, 2, 4$ のいずれかであり、

$$(m - 1)^2 = d + 2$$

である。 m が正の整数になるのは $d = 2$ 、 $m - 1 = 2$ の場合だけである。よって

$$m = 3, \quad n = 1 + \frac{4 \cdot 3}{2} = 7$$

である。

【総評】 三角関数の加法定理と整数条件を組み合わせる問題。目安時間は 21 分。(1) は $\beta = \pi/4 - 2\alpha$ を作るのが自然である。(2) は $\beta > 0$ から分母が正になることを先に確認し、 $n = 1 + 4m/(m^2 - 2m - 1)$ として割り切り条件へ落とす。候補を $m = 3, 4, 5, 6$ に絞る過程を書けば、整数解の確認が十分に説得的になる。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・必要十分性・符号も確認した。

【第 4 問】

曲線 $C: y = \sqrt{3}e \log x$ がある。ここに対数は自然対数で、 e はその底とする。

- (1) 原点 O から曲線 C に引いた接線の方程式を求めよ。
- (2) (1) における接線の接点を A とする。曲線 C の下側にあって、 x 軸と点 B で接し、かつ A で曲線 C と共通の接線をもつ円の中心を P とする。曲線 C と x 軸および円の弧 AB (中心角 $\angle APB < \pi$ に対する弧) で囲まれた図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は接点を $x = u$ と置き、接線が原点を通る条件から $u = e$ を求める。(2) は円が x 軸に接するので中心を (h, r) 、半径を r と置く。点 A で曲線と共通接線をもつことから半径 PA は接線に垂直であり、そこから中心と半径を決める。面積は、曲線の下側の面積と、媒介変数で表した円弧の下側の面積を足して求める。

【解答】

(1) 曲線を $y = \sqrt{3}e \log x$ とおく。 $x = u$ における接線は、導関数 $y' = \frac{\sqrt{3}e}{x}$ を用いて $y = \sqrt{3}e \log u + \frac{\sqrt{3}e}{u}(x - u)$ である。これが原点を通るためには $0 = \sqrt{3}e \log u - \sqrt{3}e$ すなわち $\log u = 1$ であればよい。よって $u = e$ である。したがって接点は $A = (e, \sqrt{3}e)$ であり、接線は $y = \sqrt{3}x$ である。

(2) 円は x 軸に接するので、中心を $P = (h, r)$ 半径を r とおく。点 A における共通接線の傾きは $\sqrt{3}$ であるから、半径 PA はこの接線に垂直であり、傾きは $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。したがって $\frac{\sqrt{3}e - r}{e - h} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。また A は円周上にあるから $(e - h)^2 + (\sqrt{3}e - r)^2 = r^2$ である。

上の 2 式からは候補として $(h, r) = (2e, 2e/\sqrt{3})$ と $(h, r) = (-2e, 2\sqrt{3}e)$ の 2 組を得る。後者では点 A は円の下側の弧にあり、その弧の $x = e$ における第 2 導関数は $4/(\sqrt{3}e) > 0$ である。一方、曲線 C の第 2 導関数は $-\sqrt{3}/e < 0$ だから、後者の円弧は A の近くで曲線 C より上側に出てしまう。したがって「曲線 C の下側にある」という条件を満たすのは $h = 2e, r = 2e/\sqrt{3}$ の方だけである。よって $P = \left(2e, \frac{2e}{\sqrt{3}}\right)$ であり、 x 軸との接点は $B = (2e, 0)$ である。

求める図形は、曲線 C の $x = 1$ から $x = e$ までの部分、円弧 AB 、および x 軸で囲まれる。曲線の下側の面積は

$$\int_1^e \sqrt{3}e \log x \, dx = \sqrt{3}e [x \log x - x]_1^e = \sqrt{3}e$$

である。

次に円弧 AB を $x = 2e + r \cos \theta, y = r + r \sin \theta$ と表す。点 A は $\theta = 5\pi/6$ 、点 B は $\theta = 3\pi/2$ に対応し、この弧の中心角は $2\pi/3 < \pi$ である。したがって円弧の下側の面積は

$$\int_{5\pi/6}^{3\pi/2} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{5\pi/6}^{3\pi/2} (r + r \sin \theta)(-r \sin \theta) d\theta$$

である。この値は

$$-r^2 \int_{5\pi/6}^{3\pi/2} (\sin \theta + \sin^2 \theta) d\theta$$

であり、

$$\begin{aligned} \int_{5\pi/6}^{3\pi/2} \sin \theta \, d\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \int_{5\pi/6}^{3\pi/2} \sin^2 \theta \, d\theta &= \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

だから

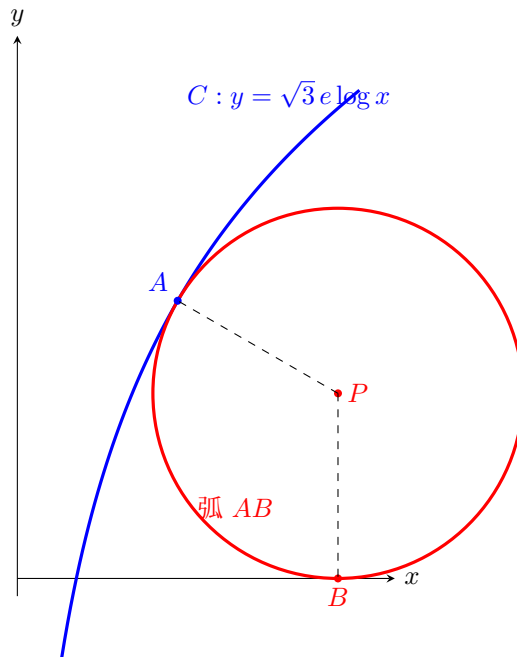
$$\int_{5\pi/6}^{3\pi/2} y \, dx = r^2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3} \right)$$

である。 $r^2 = 4e^2/3$ を代入して、円弧部分の寄与は

$$\frac{4e^2}{3} \left(\frac{5\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{3} \right) = e^2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4\pi}{9} \right)$$

となる。

したがって求める面積は $\sqrt{3}e + e^2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4\pi}{9} \right)$ である。整理すると $\frac{e}{18} \{18\sqrt{3} + (15\sqrt{3} - 8\pi)e\}$ である。



曲線、 x 軸、中心角 $2\pi/3$ の円弧で囲まれる領域

▶ 解法 2

【方針】

(1) 接点条件から $A = (e, \sqrt{3}e)$ と接線を求める。(2) 円の中心と半径を決めた後、境界を直線で結んだ三角形を基準にする。対数曲線と弦の間の面積を加え、円弧と弦の間の円弧部分を扇形から三角形を引いて求める。

【解答】

(1) $x = u$ における接線は

$$y = \sqrt{3}e \log u + \frac{\sqrt{3}e}{u}(x - u).$$

これが原点を通る条件は $\log u = 1$ だから

$$A = (e, \sqrt{3}e), \quad y = \sqrt{3}x$$

である。

(2) 円の中心を $P = (h, r)$ とする。 x 軸と接するので半径は r である。 A における半径は傾き $-1/\sqrt{3}$ をもち、かつ $PA = r$ である。条件を解いて「曲線の下側」にある方を選ぶと

$$P = \left(2e, \frac{2e}{\sqrt{3}} \right), \quad r = \frac{2e}{\sqrt{3}}, \quad B = (2e, 0)$$

となる。半径 PA, PB のなす小さい角は $2\pi/3$ である。

$C = (1, 0)$ とし、まず三角形 CAB の面積を取る。

$$[CAB] = \frac{1}{2}(2e - 1)\sqrt{3}e.$$

線分 CA を対数曲線に置き換えると、増える面積は

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{3}e \log x \, dx - \frac{1}{2}(e - 1)\sqrt{3}e &= \sqrt{3}e - \frac{1}{2}(e - 1)\sqrt{3}e \\ &= \frac{\sqrt{3}e(3 - e)}{2}. \end{aligned}$$

一方、線分 AB と小さい弧 AB の間の円弧部分は、中心角 $2\pi/3$ の扇形から三角形 PAB を引いて

$$\begin{aligned} S_{\text{seg}} &= \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{4\pi e^2}{9} - \frac{\sqrt{3}e^2}{3}. \end{aligned}$$

この円弧は三角形 CAB の内側へふくらむので、この面積を引く。したがって求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{3}e(2e-1)}{2} + \frac{\sqrt{3}e(3-e)}{2} - \left(\frac{4\pi e^2}{9} - \frac{\sqrt{3}e^2}{3} \right) \\ &= \sqrt{3}e + e^2 \left(\frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{4\pi}{9} \right) \\ &= \frac{e}{18} \{18\sqrt{3} + (15\sqrt{3} - 8\pi)e\}. \end{aligned}$$

【総評】 接線、接円、弧を含む面積を組み合わせる計算量の大きい問題。目安時間は 32 分。(1) は接線が原点を通る条件から $\log u = 1$ が出る。(2) は中心を (h, r) と置き、 x 軸への接触と A での共通接線から中心を決めるのが第一関門である。面積計算では、円弧の x 座標が単調でないため、媒介変数による

$$\int y \, dx$$

で向きを管理することが重要である。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・必要十分性・符号も確認した。

【第 5 問】

n を自然数とし、 $f(x) = \sum_{k=1}^{2n} |x - 3^k|$ とする。

- (1) x が実数全体を動くとき、 $f(x)$ の値を最小にするような実数 x の集合を求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値を a_n とするとき、 a_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{9^n}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値の和は、点 $3, 3^2, \dots, 3^{2n}$ からの距離の和である。偶数個の点に対する距離和は中央の 2 点の間で最小になることを、左右の点数または対にして確認する。(2) は $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ で左に n 個、右に n 個あることを使い、 x の項が消える形で等比数列の和を計算する。

【解答】

(1) $3 < 3^2 < \dots < 3^{2n}$ であり、 $f(x)$ はこれら $2n$ 個の点から x までの距離の和である。 x が区間 $3^j < x < 3^{j+1}$ にあるとき、左側にある点の個数を j 、右側にある点の個数を $2n - j$ と見ると、 x を少し右に動かしたとき、左側の距離は j 個増え、右側の距離は $2n - j$ 個減る。したがって $j < n$ では右に動かすと $f(x)$ は減少し、 $j > n$ では右に動かすと $f(x)$ は増加する。中央である $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ では、左側と右側の個数がどちらも n 個になるため、距離和は一定で最小となる。

よって、 $f(x)$ の値を最小にする x の集合は $[3^n, 3^{n+1}]$ である。

(2) $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ とする。このとき $f(x) = \sum_{k=1}^n (x - 3^k) + \sum_{k=n+1}^{2n} (3^k - x)$ である。左側、右側ともに n 個ずつあるので、 x の項は打ち消し合い、 $a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} 3^k - \sum_{k=1}^n 3^k$ となる。等比数列の和を用いると

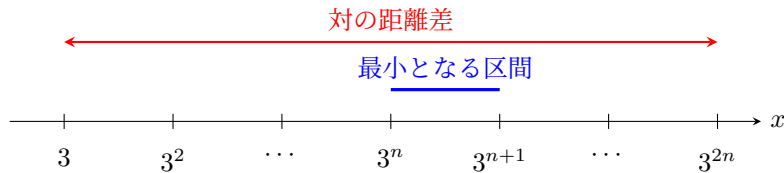
$$\sum_{k=n+1}^{2n} 3^k = \frac{3^{2n+1} - 3^{n+1}}{2}, \quad \sum_{k=1}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

である。したがって $a_n = \frac{3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} + 3}{2}$ である。

また $9^n = 3^{2n}$ だから

$$\frac{a_n}{9^n} = \frac{3}{2} - \frac{3^{n+1}}{3^{2n}} + \frac{3}{2 \cdot 3^{2n}}$$

である。右辺の第 2 項、第 3 項は $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づくので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{9^n} = \frac{3}{2}$ である。



左右の項を対にすると、中央区間では各対の距離和が一定になる

▶ 解法 2

【方針】

(1) 中央の 2 点をはさむ区間で、左から k 番目と右から k 番目を対にする。各対までの距離和が x によらず一定になることを示す。区間の外では少なくとも一対の和が増える。(2) 対ごとの差を等比数列として合計し、極限を取る。

【解答】

(1) $3^n \leq x \leq 3^{n+1}$ とする。 $k = 1, \dots, n$ に対し、点 3^k と点 3^{2n+1-k} を対にする。このとき

$$3^k \leq x \leq 3^{2n+1-k}$$

だから、この対からの距離の和は

$$(x - 3^k) + (3^{2n+1-k} - x) = 3^{2n+1-k} - 3^k$$

となり、 x によらない。全ての対について同じなので、中央区間では $f(x)$ は一定である。

$x < 3^n$ から右へ動かすと右側の点の方が多いため距離和は減り、 $x > 3^{n+1}$ では右へ動かすと距離和は増える。したがって最小となる集合は

$$[3^n, 3^{n+1}]$$

である。

(2) 上の対の和を合計すると

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n (3^{2n+1-k} - 3^k) \\ &= \sum_{j=n+1}^{2n} 3^j - \sum_{k=1}^n 3^k \\ &= \frac{3^{2n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} + 3}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{a_n}{9^n} = \frac{3}{2} - 3^{1-n} + \frac{3}{2 \cdot 9^n} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

よって極限値は $3/2$ である。

【総評】 絶対値の和の最小化と等比数列の和を組み合わせる問題。目安時間は 18 分。偶数個の点に対する距離和は中央 2 点の間で最小になる、という基本性質を明確に使うと (1) は短い。(2) は最小区間内で左に n 個、右に n 個あるため、 x が消えることを確認してから和を計算する。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・必要十分性・符号も確認した。

【第 6 問】

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} - (ax + b)\} = 0$ となるように定数 a, b を定めよ。
 (2) (1) で求めた a, b に対して、曲線 $y = \sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}}$ および 2 つの直線 $y = ax + b, x = 0$ で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線の無限遠での一次近似を、有理化によって求める。まず $\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}}/x \rightarrow 1$ から $a = 1$ を決め、次に有理化で $\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} - x \rightarrow 1$ を示して $b = 1$ を得る。(2) は直線 $y = x + 1$ と曲線の上下を平方で比較し、交点 $x = 1$ までは回転体の体積として積分する。

【解答】

(1) まず

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}$$

であり、 $x \rightarrow +\infty$ で右辺は 1 に近づく。したがって差が 0 に近づくためには $a = 1$ でなければならない。

次に

$$\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} - x = \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} + x}$$

である。分母を x で割って見ると

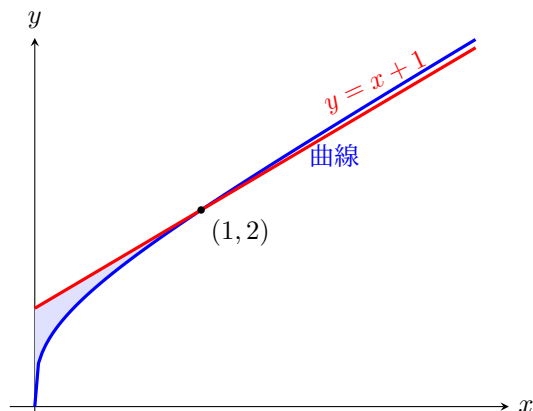
$$\frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} + x} = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} + 1}$$

であり、 $x \rightarrow +\infty$ で $\frac{2}{2} = 1$ に近づく。したがって $\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} - (x + 1) \rightarrow 0$ であるから $a = 1, b = 1$ である。

(2) (1) より直線は $y = x + 1$ である。曲線を $y = \sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}}$ とおく。 $x \geq 0$ で両方とも非負であり、 $(x + 1)^2 - (x^2 + 2x + \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$ である。したがって $0 \leq x \leq 1$ では直線の方が上にあり、 $x = 1$ で曲線と直線が交わる。

よって、回転体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{(x + 1)^2 - (x^2 + 2x + \sqrt{x})\} dx \\ &= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



直線は無限遠で曲線に近づき、 $0 \leq x \leq 1$ で曲線の上にある

▶ 解法 2

【方針】

(1) 根号内と $(x+1)^2$ の差が $\sqrt{x}-1$ になることを利用し、まず曲線が直線 $y=x+1$ に近づくことを直接示す。その後、一般の $ax+b$ との差の極限から一意性を確認する。(2) 平方差が $1-\sqrt{x}$ なので、交点と上下関係を同時に決め、円板の差を積分する。

【解答】

(1)

$$x^2 + 2x + \sqrt{x} - (x+1)^2 = \sqrt{x} - 1$$

だから、有理化すると

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} - (x+1) \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + \sqrt{x}} + x + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

よって $a=1, b=1$ なら条件を満たす。

また曲線を $F(x)$ と書けば $F(x) - (x+1) \rightarrow 0$ である。一般の a, b に対して

$$F(x) - (ax+b) = \{F(x) - (x+1)\} + (1-a)x + (1-b)$$

だから、この極限が 0 となるには

$$a=1, \quad b=1$$

でなければならない。

(2) $x \geq 0$ では両方とも非負であり、

$$(x+1)^2 - \{x^2 + 2x + \sqrt{x}\} = 1 - \sqrt{x}.$$

したがって $0 \leq x \leq 1$ で直線が曲線の上にあり、 $x=1$ で交わる。求める回転体の体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 [(x+1)^2 - \{x^2 + 2x + \sqrt{x}\}] dx \\ &= \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 無限遠で近づく直線と回転体体積を求める問題。目安時間は 18 分。極限変数は x で統一されている。(1) は有理化で $b=1$ を確認すると安全である。(2) は平方を比較して上下関係と交点 $x=1$ を決め、回転体の断面積を差で積分する。2 つの解法と解説図を相互に照合し、境界値・必要十分性・符号も確認した。