

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1987 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ($a^2 + b^2 = c^2$, $b \neq 0$) に対し, 実数 x , y , θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) が存在して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表せることを示せ. さらに, このときの x , y を a , b , c で表せ.

第 2 問

a, b を正の整数とする. 関数

$$f(x) = 4x^3 - ax^2 + 2bx - 8$$

が次の 3 つの条件を同時に満たすような a, b の組をすべて求めよ.

(i) $f(1) > 0$

(ii) $f(x)$ は極値をもつ.

(iii)

$$c_n = \int_0^{2^{n-1}} f(x) dx$$

($n = 1, 2, 3$) で定義される c_1, c_2, c_3 が等比数列をなす.

第 3 問

a を 0 でない実数とする. 2 つの曲線 $y = e^x$ および $y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ.

第 4 問

4 枚 1 組のカードが 2 組ある。正しいサイコロを投げて、1, 2, 3, 4 の目が出たときは枚数の多い組から、5, 6 の目が出たときは枚数の少ない組からカードを 1 枚除く。ただし、2 組のカードの枚数が等しいときには、どちらの組から除いてもよい。このような試行を続けて、どちらか一方の組のカードが全部なくなったときに他方の組に残っているカードの枚数を X とする。

確率変数 X の確率分布と期待値を求めよ。

第 5 問

xy 平面との交わりが円 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ となり，平面 $4x + 2\sqrt{2}y - z = 4$ に接する球の方程式を求めよ．

第 6 問

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ とし, $f_a(x)$ を次の式で定義する.

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{2a - |x|}{2a^2} & (|x| \leq 2a) \\ 0 & (2a < |x| \leq \pi) \end{cases}$$

極限值

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) |\cos ax| dx$$

を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)