

東北大学 1987 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ ($a^2 + b^2 = c^2, b \neq 0$) に対し、実数 x, y, θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) が存在して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と表せることを示せ。さらに、このときの x, y を a, b, c で表せ。

▶ 解法 1：成分比較から回転角を選ぶ

【方針】

右辺の 2 つの行列を掛けて成分比較する。下左成分を 0 にする条件から $\tan \theta = -\frac{b}{a+c}$ を選ぶのが自然である。

$a^2 + b^2 = c^2, b \neq 0$ から $|c| > |a|$ なので $a+c \neq 0$ であり、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に θ を取れる。あとは $\cos \theta > 0$ を使って x, y を成分比較から求める。

【解答】

$C = \cos \theta, S = \sin \theta$ とおく。右辺の積を成分で計算すると、第 1 行は $(xC + yS, -xS + yC)$ 第 2 行は $(yC + xS, -yS + xC)$ である。これが第 1 行 (a, b) 、第 2 行 $(0, c)$ の行列に等しくなればよい。

まず下左成分を 0 にするために $yC + xS = 0$ を満たすように θ を選ぶ。条件 $a^2 + b^2 = c^2, b \neq 0$ より $c \neq 0$ かつ $|c| > |a|$ である。したがって $a+c \neq 0$ であり、 $\tan \theta = -\frac{b}{a+c}$ を満たす θ がただ 1 つ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ に存在する。この範囲では $C = \cos \theta > 0$ である。

この θ に対して $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{a}{c}, \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{b}{c}$ が成り立つ。ここでは $a^2 + b^2 = c^2$ を用いて整理している。

成分比較から、下左成分が 0 であることに加えて $a = xC + yS, b = -xS + yC, c = -yS + xC$ が必要である。 $yC + xS = 0$ より $y = -x\frac{S}{C}$ であり、これを $c = -yS + xC$ に代入すると $c = x\left(\frac{S^2}{C} + C\right) = \frac{x}{C}$ である。よって $x = cC$ である。また $y = -x\frac{S}{C} = -cS$ である。

これを C だけで表すと、 $2C^2 - 1 = \cos 2\theta = \frac{a}{c}$ より $C^2 = \frac{a+c}{2c}$ であり、 $C > 0$ だから $C = \sqrt{\frac{a+c}{2c}}$ である。したがって $x = cC = \frac{a+c}{2C}, y = -cS = \frac{b}{2C}$ となる。すなわち $x = \frac{a+c}{2\cos \theta}, y = \frac{b}{2\cos \theta}$ である。これにより右辺の各成分は確かに $(a, b), (0, c)$ と一致する。

さらに $C = \cos \theta = \sqrt{(a+c)/(2c)}$ だから、最終的に

$$x = c\sqrt{\frac{a+c}{2c}}, \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2c}{a+c}}$$

と、 a, b, c だけで表せる。

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

下左成分を 0 にするように θ を選ぶ

▶ 解法 2：半角の値を先に定めて直接検算する

【方針】

条件から $|c| > |a|$ なので $(a+c)/(2c) > 0$ である。そこで $\cos \theta$ を $\cos 2\theta = a/c$ の半角公式で正に選び、 $\sin \theta$ は $\sin 2\theta = -b/c$ と符号が合うように定める。その後、 $x = c \cos \theta$, $y = -c \sin \theta$ と置いて積を直接計算し、存在と a, b, c だけによる表示を同時に示す。

【解答】

条件 $a^2 + b^2 = c^2$, $b \neq 0$ から

$$|c| > |a|, \quad c \neq 0.$$

したがって

$$C = \sqrt{\frac{a+c}{2c}}$$

は正の実数であり、 $0 < C < 1$ である。さらに

$$S = -\frac{b}{2cC}$$

とおくと

$$C^2 + S^2 = 1.$$

よって $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ に

$$\cos \theta = C, \quad \sin \theta = S$$

を満たす θ が存在する。このとき

$$\cos 2\theta = \frac{a}{c}, \quad \sin 2\theta = -\frac{b}{c}.$$

ここで

$$x = cC, \quad y = -cS$$

とおく。行列の積を計算すると、下左成分は

$$yC + xS = -cSC + cCS = 0,$$

下右成分は

$$-yS + xC = c(S^2 + C^2) = c.$$

また上左・上右成分は

$$xC + yS = c(C^2 - S^2) = c \cos 2\theta = a,$$

$$-xS + yC = -2cSC = -c \sin 2\theta = b.$$

したがって所要の分解が成り立つ。

x, y を a, b, c だけで書けば

$$x = c\sqrt{\frac{a+c}{2c}}, \quad y = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{2c}{a+c}}.$$

根号内はいずれも正である。

【総評】 難度 7、計算量 7、目安時間 22 分。原問題が行列分解を明示するため、成分比較と回転行列を用いる。 $b \neq 0$ から $|c| > |a|$ を得て $a+c \neq 0$ と根号内の正値を保証する箇所が重要である。角を選ぶ解法と半角値を直接定める解法で存在を相互確認した。最終答案では x, y を θ を残さず a, b, c だけで表示する。

【第 2 問】

a, b を正の整数とする. 関数

$$f(x) = 4x^3 - ax^2 + 2bx - 8$$

が次の 3 つの条件を同時に満たすような a, b の組をすべて求めよ.

- (i) $f(1) > 0$
- (ii) $f(x)$ は極値をもつ.
- (iii)

$$c_n = \int_0^{2^{n-1}} f(x) dx$$

($n = 1, 2, 3$) で定義される c_1, c_2, c_3 が等比数列をなす.

▶ 解法 1：三条件を整数範囲へ直す

【方針】

3 条件を順に整数条件へ直す. $f(1) > 0$ は一次不等式、極値をもつ条件は導関数の判別式が正であること. c_1, c_2, c_3 は積分して明示し、等比数列条件を $c_2^2 = c_1 c_3$ として整理する. ここで $(a - 21)(b - 14) = 0$ が出るので、 $a = 21$ の場合と $b = 14$ の場合を別々に、正の整数条件まで丁寧に絞る.

【解答】

まず条件 (i) を調べる. $f(1) = 4 - a + 2b - 8 = 2b - a - 4$ だから $2b - a - 4 > 0$ すなわち $a < 2b - 4$ である.

次に条件 (ii) を調べる. $f'(x) = 12x^2 - 2ax + 2b$ である. $f(x)$ が極値をもつには、2 次方程式 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよい. 判別式より $(-2a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2b > 0$ すなわち $a^2 > 24b$ である.

次に条件 (iii) を計算する. 原始関数は

$$\int f(x) dx = x^4 - \frac{a}{3}x^3 + bx^2 - 8x$$

である. したがって

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - \frac{a}{3} + b - 8 = -\frac{a}{3} + b - 7, \\ c_2 &= 16 - \frac{8a}{3} + 4b - 16 = -\frac{8a}{3} + 4b, \\ c_3 &= 256 - \frac{64a}{3} + 16b - 32 = -\frac{64a}{3} + 16b + 224. \end{aligned}$$

c_1, c_2, c_3 が等比数列をなす条件は $c_2^2 = c_1 c_3$ である. 代入して整理すると $\frac{16}{3}(a - 21)(b - 14) = 0$ となる. よって $a = 21$ または $b = 14$ である.

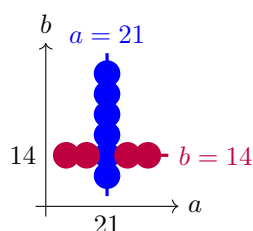
【場合 1: $a = 21$ 】条件 (i) は $2b - 25 > 0$ より、 b は正の整数なので $b \geq 13$ である. 条件 (ii) は $21^2 > 24b$ すなわち $441 > 24b$ であるから $b \leq 18$ である. したがって $b = 13, 14, 15, 16, 17, 18$ を得る.

【場合 2: $b = 14$ 】条件 (i) は $28 - a - 4 > 0$ より $a < 24$ である. 条件 (ii) は $a^2 > 24 \cdot 14 = 336$ であり、 a は正の整数なので $a \geq 19$ である. したがって $a = 19, 20, 21, 22, 23$ を得る.

以上を合わせる. ただし $(21, 14)$ は両方の場合に含まれる. 求める組は

$$(21, 13), (21, 14), (21, 15), (21, 16), (21, 17), (21, 18), (19, 14), (20, 14), (22, 14), (23, 14)$$

である.



▶ 解法 2：積分値を 3 倍して因数分解を見通す

【方針】

分母を避けるため $d_n = 3c_n$ と置く。三つの積分値を整数係数で書き、等比条件 $d_2^2 = d_1 d_3$ を展開すると、 $a - 21$ と $b - 14$ の積へ因数分解できる。得られた二直線上で、 $f(1) > 0$ と導関数の判別式条件を整数範囲として交差させ、重複する一点を一度だけ数える。

【解答】

条件 (i) は

$$f(1) = 2b - a - 4 > 0.$$

また

$$f'(x) = 12x^2 - 2ax + 2b$$

が異なる二実根をもつ条件は

$$a^2 > 24b.$$

原始関数から $d_n = 3c_n$ を計算すると

$$d_1 = -a + 3b - 21,$$

$$d_2 = -8a + 12b,$$

$$d_3 = -64a + 48b + 672.$$

三項が等比数列となるには $d_2^2 = d_1 d_3$ であり、整理すると

$$48(a - 21)(b - 14) = 0.$$

$(a, b) = (21, 14)$ では三項とも 0 なので、この条件はこの場合も十分である。

$a = 21$ なら $2b - 25 > 0$ と $441 > 24b$ より

$$b = 13, 14, 15, 16, 17, 18.$$

$b = 14$ なら $24 - a > 0$ と $a^2 > 336$ より

$$a = 19, 20, 21, 22, 23.$$

重複する $(21, 14)$ を一度だけ書くと、求める組は

$$(21, 13), (21, 14), (21, 15), (21, 16), (21, 17), (21, 18), \\ (19, 14), (20, 14), (22, 14), (23, 14)$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 8、目安時間 24 分。積分値の等比条件を因数分解し、二つの整数直線 $a = 21$ 、 $b = 14$ 上で残る範囲を調べる問題である。 $c_2^2 = c_1 c_3$ の展開、導関数の判別式の厳密不等号、正の整数への丸めが主要な得点点になる。三項が全て 0 となる $(21, 14)$ も等比数列として適合し、重複は一度だけ数える。

【第 3 問】

a を 0 でない実数とする. 2 つの曲線 $y = e^x$ および $y = ax^2$ の両方に接する直線の本数を求めよ.

▶ 解法 1：指数曲線の接点で共通接線を表す

【方針】

共通接線を、まず $y = e^x$ の接線として $x = u$ で表す。その直線が $y = ax^2$ にも接する条件は、2 次方程式が重解をもつことに等しい。これにより $a = \frac{e^u}{4(u-1)^2}$ が得られるので、 $u < 1$ と $u > 1$ に分けてこの関数の値域と単調性を調べる。 a の符号と $\frac{e^2}{4}$ を境に本数を分類する。

【解答】

$y = e^x$ の $x = u$ における接線は $y = e^u(x - u) + e^u = e^u x + e^u(1 - u)$ である。この直線が $y = ax^2$ にも接するとする。交点を調べると $ax^2 = e^u x + e^u(1 - u)$ すなわち $ax^2 - e^u x - e^u(1 - u) = 0$ である。接するためには、この 2 次方程式が重解をもてばよい。判別式を 0 として $e^{2u} + 4ae^u(1 - u) = 0$ を得る。したがって $a = \frac{e^u}{4(u-1)^2}$ である。右辺を

$$\phi(u) = \frac{e^u}{4(u-1)^2} \quad (u \neq 1) \text{ とおく。}$$

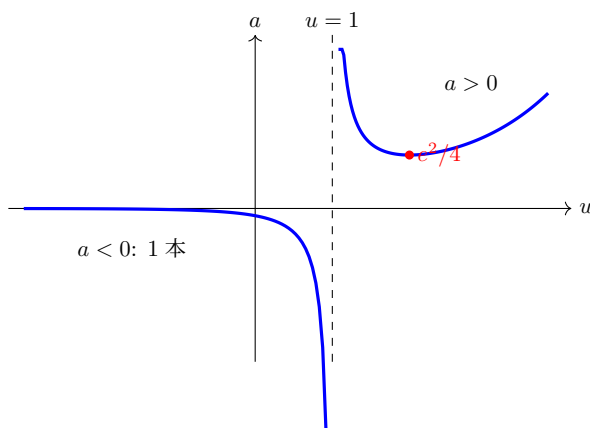
まず $u < 1$ では $\phi(u) < 0$ である。また $\phi'(u) = \frac{(u-2)e^u}{4(u-1)^3}$ なので、 $u < 1$ では $\phi'(u) < 0$ である。さらに $\lim_{u \rightarrow -\infty} \phi(u) = 0$, $\lim_{u \rightarrow 1-} \phi(u) = -\infty$ である。よって $a < 0$ のときは、対応する $u < 1$ がただ 1 つ存在し、共通接線は 1 本である。

次に $u > 1$ では $\phi(u) > 0$ である。導関数の符号から、 $\phi(u)$ は $1 < u < 2$ で減少し、 $u > 2$ で増加する。最小値は $u = 2$ のときで $\phi(2) = \frac{e^2}{4}$ である。また $u \rightarrow 1+$ と $u \rightarrow \infty$ で $\phi(u) \rightarrow \infty$ となる。

したがって共通接線の本数は

$$\begin{cases} 1 \text{ 本} & (a < 0), \\ 0 \text{ 本} & (0 < a < \frac{e^2}{4}), \\ 1 \text{ 本} & (a = \frac{e^2}{4}), \\ 2 \text{ 本} & (a > \frac{e^2}{4}) \end{cases}$$

である。



▶ 解法 2：接線の傾きを変数にする

【方針】

共通接線を $y = mx + n$ と置く。指数曲線に接するため $m > 0$ で、接点は $x = \log m$ 、切片は $m(1 - \log m)$ となる。放物線に接する条件は $ax^2 - mx - n = 0$ の判別式が 0 であること。この二条件から $a = m / \{4(\log m - 1)\}$ を得て、 $m < e$ と $m > e$ の各枝の値域を調べる。

【解答】

共通接線を $y = mx + n$ とする。これが $y = e^x$ に接するなら、接点を $x = u$ として

$$m = e^u > 0, \quad n = e^u(1 - u) = m(1 - \log m).$$

一方、 $y = ax^2$ と接する条件は

$$ax^2 - mx - n = 0$$

が重解をもつことから

$$m^2 + 4an = 0.$$

切片 n を代入すると

$$a = \frac{m}{4(\log m - 1)} \quad (m > 0, m \neq e).$$

$$\psi(m) = \frac{m}{4(\log m - 1)}$$

とおく。 $0 < m < e$ では $\psi(m) < 0$ であり、

$$\psi'(m) = \frac{\log m - 2}{4(\log m - 1)^2} < 0.$$

また $m \rightarrow 0+$ で $\psi(m) \rightarrow 0-$ 、 $m \rightarrow e-$ で $\psi(m) \rightarrow -\infty$ だから、 $a < 0$ では 1 本である。

$m > e$ では正で、 $e < m < e^2$ で減少、 $m > e^2$ で増加する。最小値は

$$\psi(e^2) = \frac{e^2}{4}.$$

したがって本数は

$$\begin{cases} 1 & (a < 0), \\ 0 & (0 < a < e^2/4), \\ 1 & (a = e^2/4), \\ 2 & (a > e^2/4) \end{cases}$$

である。傾き m が異なれば接線も異なるので、この解の個数がそのまま本数になる。

【総評】 難度 7、計算量 5、目安時間 20 分。共通接線を曲線上の接点で表すか、傾き m で表すかの選択が中心である。どちらも一変数関数の値域へ帰着し、負の枝は全て 1 本、正の枝は最小値 $e^2/4$ を境に $0 \cdot 1 \cdot 2$ 本となる。分母が 0 になる接点を除き、極限と単調性を両側で書くことが完全答案の条件である。

【第 4 問】

4 枚 1 組のカードが 2 組ある．正しいサイコロを投げて，1, 2, 3, 4 の目が出たときは枚数の多い組から，5, 6 の目が出たときは枚数の少ない組からカードを 1 枚除く．ただし，2 組のカードの枚数が等しいときには，どちらの組から除いてもよい．このような試行を続けて，どちらか一方の組のカードが全部なくなったときに他方の組に残っているカードの枚数を X とする．

確率変数 X の確率分布と期待値を求めよ．

▶ 解法 1：枚数状態を小さい方から遡る

【方針】

2 組の枚数を多い方から (m, n) と並べて状態を表す． $m > n$ では多い組から除く確率が $\frac{2}{3}$ 、少ない組から除く確率が $\frac{1}{3}$ ． $m = n$ ではどちらを除んでも次の状態は $(m, m-1)$ と同じである．小さい状態から X の分布を順に求め、初期状態 $(4, 4)$ の分布を得る．最後に期待値を計算する．

【解答】

2 組の残り枚数を、多い方から順に (m, n) と書くことにする． $m = n$ のときは、どちらの組から除いても次の状態は $(m, m-1)$ で同じである． $m > n$ のとき、多い組から除く確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 、少ない組から除く確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である．

状態 (m, n) から始めたときの X の分布を小さい状態から順に求める．明らかに $(1, 1)$ ： $P(X=1)=1$ である．これをもとに計算すると $(2, 1)$ ： $P(X=1)=\frac{2}{3}$ ， $P(X=2)=\frac{1}{3}$ ， $(3, 1)$ ： $P(X=1)=\frac{4}{9}$ ， $P(X=2)=\frac{2}{9}$ ， $P(X=3)=\frac{1}{3}$ ，

$$(3, 2)： P(X=1)=\frac{16}{27}, P(X=2)=\frac{8}{27}, P(X=3)=\frac{1}{9}.$$

さらに

$$\begin{aligned} (4, 1)： P(X=1)=\frac{8}{27}, P(X=2)=\frac{4}{27}, P(X=3)=\frac{2}{9}, P(X=4)=\frac{1}{3}, \\ (4, 2)： P(X=1)=\frac{40}{81}, P(X=2)=\frac{20}{81}, P(X=3)=\frac{4}{27}, P(X=4)=\frac{1}{9}, \\ (4, 3)： P(X=1)=\frac{136}{243}, P(X=2)=\frac{68}{243}, P(X=3)=\frac{10}{81}, P(X=4)=\frac{1}{27} \end{aligned}$$

となる．

初期状態は $(4, 4)$ であり、1 回除くと必ず状態 $(4, 3)$ になる．したがって初期状態からの分布も $(4, 3)$ と同じで、

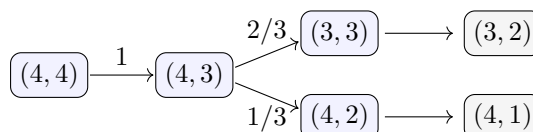
$$P(X=1)=\frac{136}{243}, P(X=2)=\frac{68}{243}, P(X=3)=\frac{10}{81}, P(X=4)=\frac{1}{27}$$

である．なお $\frac{10}{81} = \frac{30}{243}$ 、 $\frac{1}{27} = \frac{9}{243}$ なので確率の和は $\frac{136+68+30+9}{243} = 1$ である．

期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{136}{243} + 2 \cdot \frac{68}{243} + 3 \cdot \frac{10}{81} + 4 \cdot \frac{1}{27} \\ &= \frac{136 + 136 + 90 + 36}{243} \\ &= \frac{398}{243}. \end{aligned}$$

である．



状態は常に「多い方、少ない方」の順

▶ 解法 2：各残数の確率を漸化式で求める

【方針】

多い方・少ない方の枚数が (m, n) のとき、最後に j 枚残る確率を $p_{m,n}(j)$ と置く。同数なら次は必ず $(m, m-1)$ 、枚数が異なれば確率 $2/3$ で多い方、 $1/3$ で少ない方から 1 枚除く。この全確率の関係を各 j について用い、小さい状態から表を埋める。

【解答】

状態 (m, n) は $m \geq n$ とし、この状態から始めて最後に j 枚残る確率を $p_{m,n}(j)$ とおく。終了状態では

$$p_{m,0}(j) = \begin{cases} 1 & (j = m), \\ 0 & (j \neq m) \end{cases}$$

である。また、同数ならどちらから除いても並べ直した次の状態は同じなので

$$p_{m,m}(j) = p_{m,m-1}(j).$$

枚数が異なるときは、全確率より

$$p_{m,n}(j) = \frac{2}{3}p_{\max(m-1,n),\min(m-1,n)}(j) + \frac{1}{3}p_{m,n-1}(j) \quad (m > n)$$

となる。

この式を $j = 1, 2, 3, 4$ のそれぞれについて小さい状態から順に使うと、列を $j = 1, 2, 3, 4$ の順に並べた確率表は

状態	1	2	3	4
(2, 1)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
(3, 1)	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
(3, 2)	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}$	0
(4, 1)	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$
(4, 2)	$\frac{81}{136}$	$\frac{81}{68}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{9}{1}$
(4, 3)	$\frac{243}{243}$	$\frac{243}{243}$	$\frac{81}{81}$	$\frac{27}{27}$

となる。初期状態 $(4, 4)$ からは必ず $(4, 3)$ へ移るので、求める分布は

$$P(X = 1) = \frac{136}{243}, \quad P(X = 2) = \frac{68}{243}, \quad P(X = 3) = \frac{10}{81}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{27}.$$

確率の和は 1 である。したがって期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot \frac{136}{243} + 2 \cdot \frac{68}{243} + 3 \cdot \frac{10}{81} + 4 \cdot \frac{1}{27} \\ &= \frac{398}{243}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、計算量 9、目安時間 28 分。二組の名前を固定せず、常に多い方・少ない方の順で状態を表すことが計算量を抑える鍵である。状態ごとの確率分布を直接たどる方法と、各残数 j の確率を全確率の漸化式で求める方法で最終分布を照合した。同数状態からはどちらを除いても同じ順序状態になる。各段階で確率の和が 1 になることを確認し、最後は直接の加重和で期待値 $398/243$ を検算する。

【第 5 問】

xy 平面との交わりが円 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ となり、平面 $4x + 2\sqrt{2}y - z = 4$ に接する球の方程式を求めよ。

▶ 解法 1：中心と平面の距離を半径に等置する

【方針】

xy 平面との交わりが円 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ であることから、球の中心の x, y 座標は $(-1, 0)$ で、中心を $(-1, 0, h)$ とおける。半径を R とすると、切り口の半径 2 乗が $R^2 - h^2 = 2$ なので $R^2 = h^2 + 2$ 。平面に接する条件は、中心から平面までの距離が半径に等しいこと。距離公式で h を求め、2 つの球を出す。

【解答】

求める球の中心を (p, q, h) 、半径を R とする。 xy 平面、すなわち $z = 0$ で切った円の中心は $(p, q, 0)$ である。与えられた切り口が $(x+1)^2 + y^2 = 2$ だから $p = -1$, $q = 0$ である。よって球の中心は $(-1, 0, h)$ とおける。

この球を $z = 0$ で切ると、切り口の半径の 2 乗は $R^2 - h^2$ である。切り口の円の半径の 2 乗は 2 なので $R^2 - h^2 = 2$ すなわち $R^2 = h^2 + 2$ である。

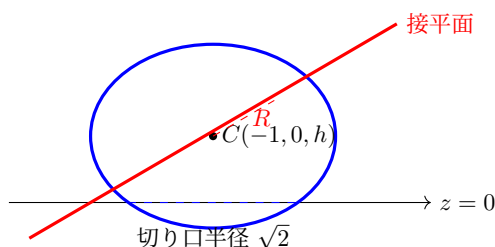
また、球は平面 $4x + 2\sqrt{2}y - z = 4$ に接する。これは $4x + 2\sqrt{2}y - z - 4 = 0$ である。中心 $(-1, 0, h)$ からこの平面までの距離は

$$\frac{|4(-1) + 2\sqrt{2} \cdot 0 - h - 4|}{\sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{|h+8|}{5}$$

である。接する条件はこの距離が半径 R に等しいことだから $\frac{|h+8|}{5} = \sqrt{h^2 + 2}$ である。両辺を 2 乗して $(h+8)^2 = 25(h^2 + 2)$ すなわち $12h^2 - 8h - 7 = 0$ を得る。よって $h = \frac{7}{6}$ または $h = -\frac{1}{2}$ である。 $h = \frac{7}{6}$ のとき

$R^2 = \frac{49}{36} + 2 = \frac{121}{36}$ 、 $h = -\frac{1}{2}$ のとき $R^2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$ である。したがって求める球は $(x+1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$

および $(x+1)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ である。



▶ 解法 2：接点が中心から法線方向にあることを使う

【方針】

切り口から中心を $C = (-1, 0, h)$ 、半径を $R = \sqrt{h^2 + 2}$ と置く。接平面の法線ベクトルは $(4, 2\sqrt{2}, -1)$ なので、接点は中心からこの方向へ伸ばした直線上にある。接点が平面上にある条件から、中心から平面までの符号付き距離を法線ベクトルの長さで表し、その絶対値を R と等置する。

【解答】

切り口の円の中心と半径から、球の中心と半径は

$$C = (-1, 0, h), \quad R^2 = h^2 + 2$$

と書ける。平面

$$4x + 2\sqrt{2}y - z - 4 = 0$$

の法線ベクトルを

$$\mathbf{n} = (4, 2\sqrt{2}, -1)$$

とすると $|\mathbf{n}| = 5$ である。

接点 Q では半径 CQ が平面に垂直だから

$$Q = C + \lambda \mathbf{n}$$

と書ける。 Q を平面の式へ代入すると

$$-8 - h + 25\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{h+8}{25}.$$

一方

$$CQ = |\lambda| |\mathbf{n}| = \frac{|h+8|}{5}.$$

これが半径 R に等しいので

$$\frac{|h+8|}{5} = \sqrt{h^2 + 2}.$$

2 乗して整理すると

$$12h^2 - 8h - 7 = 0,$$

したがって

$$h = \frac{7}{6} \quad \text{または} \quad h = -\frac{1}{2}.$$

それぞれ $R^2 = 121/36$, $9/4$ だから、求める球は

$$(x+1)^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{121}{36},$$

$$(x+1)^2 + y^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5、目安時間 16 分。切り口から中心の水平座標と $R^2 - h^2 = 2$ を得ることが前半、接平面との距離条件が後半である。距離公式と、接点が法線方向にあることを使う方法で二つの高さを相互確認した。絶対値を外す前に 2 乗し、得られた二解の半径をそれぞれ戻して、球が 2 個あることを明記する。

【第 6 問】

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ とし, $f_a(x)$ を次の式で定義する.

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{2a - |x|}{2a^2} & (|x| \leq 2a) \\ 0 & (2a < |x| \leq \pi) \end{cases}$$

極限值

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) |\cos ax| dx$$

を求めよ.

▶ 解法 1：台の上で余弦を一様に挟む

【方針】

$f_a(x)$ は $|x| \leq 2a$ の小さい区間でだけ正なので、積分範囲をそこに絞る。この区間では $|ax| \leq 2a^2$ となり、 $a \rightarrow 0$ で $|\cos ax|$ は一様に 1 へ近づく。残る f_a の積分値を直接計算すると 2 なので、はさみうちで極限を求める。

【解答】

$f_a(x)$ は $|x| \leq 2a$ でだけ正であり、それ以外では 0 である。したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) |\cos ax| dx = \int_{-2a}^{2a} \frac{2a - |x|}{2a^2} |\cos ax| dx$$

である。

この積分区間では $|x| \leq 2a$ だから $|ax| \leq 2a^2$ である。 $a \rightarrow 0$ のとき $2a^2 \rightarrow 0$ なので、この区間全体で $|\cos ax|$ は 1 に近づく。十分小さい a では $2a^2 < \pi/2$ である。このとき、十分小さい a では $2a^2 < \pi/2$ である。このとき、具体的には $\cos(2a^2) \leq |\cos ax| \leq 1$ が成り立つ。

また、重みの部分の積分は

$$\begin{aligned} \int_{-2a}^{2a} \frac{2a - |x|}{2a^2} dx &= 2 \int_0^{2a} \frac{2a - x}{2a^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \left[2ax - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2a} \\ &= 2. \end{aligned}$$

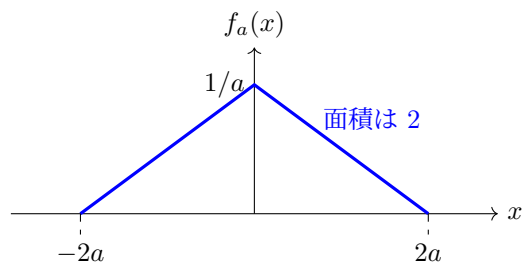
である。したがって

$$2 \cos(2a^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) |\cos ax| dx \leq 2$$

である。両端は $a \rightarrow 0$ でともに 2 に近づくから、はさみうちにより

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(x) |\cos ax| dx = 2$$

である。



▶ 解法 2：台を固定区間へ拡大して誤差を評価する

【方針】

変数変換 $x = 2au$ により、縮んでいく台 $[-2a, 2a]$ を固定区間 $[-1, 1]$ へ移す。積分は三角形の重み $2(1-|u|)$ と $|\cos(2a^2u)|$ の積になる。小さい a では余弦が正なので絶対値を外し、 $0 \leq 1 - \cos t \leq t^2/2$ を用いて極限值 2 との差を直接 0 へ挟む。

【解答】

積分の台だけを残し、 $x = 2au$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} I_a &= \int_{-2a}^{2a} \frac{2a - |x|}{2a^2} |\cos ax| dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 (1 - |u|) |\cos(2a^2u)| du. \end{aligned}$$

十分小さい $a > 0$ では $|2a^2u| < \pi/2$ なので余弦は正である。

まず余弦を 1 に置き換えた積分は

$$2 \int_{-1}^1 (1 - |u|) du = 2.$$

また、全ての实数 t で

$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} 0 \leq 2 - I_a &= 2 \int_{-1}^1 (1 - |u|) \{1 - \cos(2a^2u)\} du \\ &\leq 4a^4 \int_{-1}^1 (1 - |u|) u^2 du \\ &= \frac{2}{3} a^4. \end{aligned}$$

右端は $a \rightarrow 0$ で 0 に近づく。したがって

$$\lim_{a \rightarrow 0} I_a = 2$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 4、目安時間 14 分。積分区間全体ではなく、重みが正の $[-2a, 2a]$ だけを見ることが出発点である。その上では $|ax| \leq 2a^2$ なので余弦を一様に 1 へ挟める。直接のはさみうちと、固定区間への変数変換後の誤差評価で極限 2 を確認した。重みの面積が 2 であり、1 ではない点が典型的な失点箇所である。