

東北大学 1988 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

四面体 $OABC$ において、

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とする。 G を三角形 ABC の重心、すなわち

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

を満たす点とする。

(1) $\overrightarrow{OG} = \vec{g}$ とおいて、 AG^2 を $\vec{a}, \vec{g}$ および内積を用いて表せ。

(2) 次の等式を示せ。

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3OG^2$$

(3) 三角形 OAB の重心を E とする。

$$\overrightarrow{OF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$$

によって点 F を定めるとき、 F は直線 CE 上にあることを示せ。

▶ 解法 1：位置ベクトルを展開して重心の関係を使う

【方針】

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{g}$ を軸に、 A, B, C から G へのベクトルを展開する。(3) は C から E へ進む内分表示を作る。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AG} = \vec{g} - \vec{a}$$

だから

$$\begin{aligned} AG^2 &= (\vec{g} - \vec{a}) \cdot (\vec{g} - \vec{a}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{g} + \vec{g} \cdot \vec{g}. \end{aligned}$$

(2) 同様にして

$$\begin{aligned} AG^2 + BG^2 + CG^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} \\ &\quad - 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{g} + 3\vec{g} \cdot \vec{g}. \end{aligned}$$

ここで $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{g}$ だから

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 - 3OG^2.$$

移項すれば、示す等式を得る。

(3)

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}$$

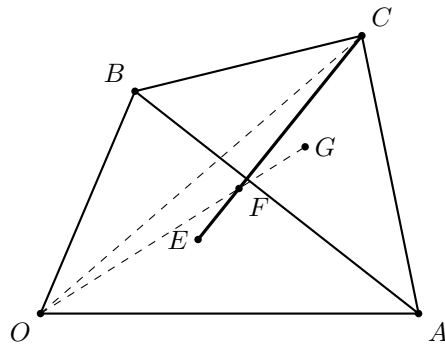
である。また

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4}.$$

一方、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}) &= \vec{c} + \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} \\ &= \overrightarrow{OF}. \end{aligned}$$

したがって F は C から E へ $3/4$ 進んだ点であり、線分 CE 上にある。



▶ 解法 2：重心を新しい原点として整理する

【方針】

G を基準に $\vec{u} = \vec{a} - \vec{g}, \vec{v} = \vec{b} - \vec{g}, \vec{w} = \vec{c} - \vec{g}$ と置く。和が 0 になるため平方和の交差項が消える。(3) は重心 E を用いた内分公式で示す。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{GA} = \vec{a} - \vec{g}$$

なので

$$AG^2 = (\vec{a} - \vec{g}) \cdot (\vec{a} - \vec{g}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{g} + \vec{g} \cdot \vec{g}.$$

(2)

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{g}, \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{g}, \quad \vec{w} = \vec{c} - \vec{g}$$

とおく。重心の関係から

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

よって

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 + OC^2 &= |\vec{g} + \vec{u}|^2 + |\vec{g} + \vec{v}|^2 + |\vec{g} + \vec{w}|^2 \\ &= 3|\vec{g}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 \\ &= 3OG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2. \end{aligned}$$

第 2 行では交差項

$$2\vec{g} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

が 0 になることを用いた。

(3) $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$ とおけば

$$3\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}.$$

したがって

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{4} = \frac{3\vec{e} + \vec{c}}{4}.$$

これは C と E を

$$CF : FE = 3 : 1$$

に内分する点の位置ベクトルである。ゆえに F は線分 CE 上にある。

【総評】 難度 5、計算量 3。重心の位置ベクトルと内積展開を結ぶ標準問題で、想定時間は 20 分程度。(2) は G を基準にすると交差項が一度に消え、恒等式の意味が見えやすい。(3) は位置ベクトルを内分表示まで書いて直線上であることを明確にした。

【第 2 問】

3 次関数 $f(x)$ は、 $x = 1$ で極小値 0、 $x = -3$ で極大値 32 をとる。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) 点 $A(0, f(0))$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線 l が、再び C と交わる点を B とする。点 P が C 上を A から B まで動くとき、 P と l との距離の最大値を求めよ。

▶ 解法 1：導関数を極値の位置から決める

【方針】

$f'(x) = k(x-1)(x+3)$ と置き、2 つの極値の差で k を決める。(2) は曲線と接線の差を因数分解し、点と直線の距離を 1 変数関数として最大化する。

【解答】

(1) 極値をとる位置から

$$f'(x) = k(x-1)(x+3)$$

と書ける。極大から極小へ減少する区間があるので $k > 0$ である。積分して

$$f(x) = k \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right) + C.$$

条件 $f(-3) - f(1) = 32$ より

$$k \left(9 + \frac{5}{3} \right) = 32,$$

したがって $k = 3$ である。さらに $f(1) = 0$ から $C = 5$ を得る。よって

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$$

(2)

$$A = (0, 5), \quad f'(0) = -9$$

だから

$$l: y = -9x + 5.$$

曲線と接線の差は

$$f(x) - (-9x + 5) = x^2(x + 3).$$

したがって再交点 B の x 座標は -3 であり、 A から B まででは

$$-3 \leq x \leq 0.$$

点 $(x, f(x))$ と直線 $9x + y - 5 = 0$ との距離は、この区間で

$$d(x) = \frac{x^2(x+3)}{\sqrt{82}}.$$

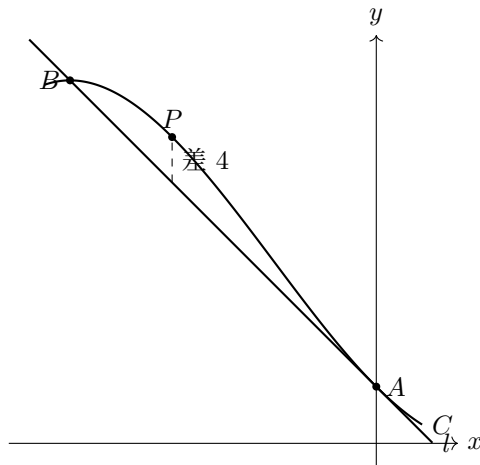
$$\{x^2(x+3)\}' = 3x(x+2)$$

より、端点と停留点で値を比較すると

$$x^2(x+3) = \begin{cases} 0 & (x = -3), \\ 4 & (x = -2), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

よって最大距離は

$$\frac{4}{\sqrt{82}} = \frac{2\sqrt{82}}{41}.$$



▶ 解法 2：極小点の重解と相加相乗平均を使う

【方針】

$f(1) = f'(1) = 0$ から $f(x) = p(x-1)^2(x-q)$ と因数分解して係数を決める。(2) は $u = -x$ と置き、相加相乗平均で距離の分子を評価する。

【解答】

(1) $x = 1$ で極小値 0 をとるので

$$f(1) = f'(1) = 0.$$

したがって

$$f(x) = p(x-1)^2(x-q)$$

と書ける。微分すると

$$f'(x) = p(x-1)\{3x - (2q+1)\}.$$

もう 1 つの停留点が $x = -3$ だから

$$\frac{2q+1}{3} = -3,$$

よって $q = -5$ である。さらに

$$32 = f(-3) = p(-4)^2 \cdot 2 = 32p$$

より $p = 1$ を得る。したがって

$$f(x) = (x-1)^2(x+5) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$$

(2) 接線は

$$l: y = -9x + 5$$

であり、

$$f(x) - l(x) = x^2(x+3).$$

よって再交点は $x = -3$ である。区間 $-3 \leq x \leq 0$ で $u = -x$ とおけば

$$0 \leq u \leq 3, \quad x^2(x+3) = u^2(3-u).$$

3 つの非負数

$$\frac{u}{2}, \quad \frac{u}{2}, \quad 3-u$$

の和は 3 なので、相加相乗平均より

$$\frac{u^2(3-u)}{4} \leq 1.$$

したがって

$$u^2(3-u) \leq 4.$$

等号は

$$\frac{u}{2} = 3-u = 1,$$

すなわち $u = 2$ のときに成立する。直線 l の方程式が $9x + y - 5 = 0$ であることから、最大距離は

$$\frac{4}{\sqrt{9^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{82}}{41}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。極値条件から 3 次関数を復元し、接線との差を距離へ変換する問題で、想定時間は 30 分程度。導関数の積分と重解因数分解の 2 経路で同じ関数を得た。距離の分母 $\sqrt{82}$ と移動区間 $[-3, 0]$ の明示が重要である。

【第 3 問】

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換が、曲線 $xy = 1$ 上のすべての点を曲線 $x^2 - y^2 = 2$ 上の点に移すとき、 A はどのような行列か。行列 A の各成分を a の式として表せ。

(2) さらに、この 1 次変換の逆変換も、曲線 $xy = 1$ 上のすべての点を曲線 $x^2 - y^2 = 2$ 上の点に移すとき、 A を求めよ。

▶ 解法 1：双曲線を媒介して係数を比較する

【方針】

$(X, Y) = A(x, y)$ と置き、 $y = 1/x$ を代入する。 $X^2 - Y^2$ の x^2 、定数、 x^{-2} の係数を比較し、2 つの行列族を得る。(2) は各逆行列へ同じ条件を適用する。

【解答】

(1)

$$X = ax + by, \quad Y = cx + dy$$

とする。 $xy = 1$ 上では $y = 1/x$ だから

$$X^2 - Y^2 = (a^2 - c^2)x^2 + 2(ab - cd) + \frac{b^2 - d^2}{x^2}.$$

これがすべての $x \neq 0$ で 2 に等しいための必要十分条件は

$$a^2 = c^2, \quad b^2 = d^2, \quad ab - cd = 1.$$

c, d がそれぞれ a, b と同符号なら最後の式を満たさない。符号を反対にとると

$$2ab = 1.$$

したがって $a \neq 0$ であり、

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ a & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ -a & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

(2) 第 1 の行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & -b \end{pmatrix}, \quad 2ab = 1$$

と書くと

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b & b \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

これも (1) の条件を満たすには

$$b^2 - a^2 = 0, \quad b^2 + a^2 = 1$$

が必要十分である。よって

$$a^2 = b^2 = \frac{1}{2}.$$

$2ab = 1$ なので a, b は同符号である。

第 2 の行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$$

の逆行列は

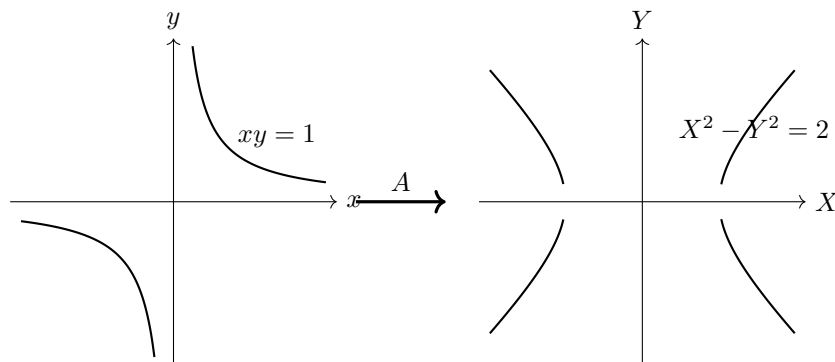
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b & -b \\ a & a \end{pmatrix}.$$

$b^2 = a^2$ を満たしても定数項の条件は

$$-b^2 - a^2 = 1$$

となり不可能である。したがって答えは

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$



▶ 解法 2：差の平方を 2 つの 1 次式の積に分ける

【方針】

$X^2 - Y^2 = (X + Y)(X - Y)$ と因数分解する。積が $2xy$ になるには 2 つの 1 次式が x, y に 1 本ずつ対応することを使い、2 つの行列族を直接作る。

【解答】

(1) $xy = 1$ 上で

$$(X + Y)(X - Y) = 2$$

が常に成り立つ。 $y = 1/x$ を代入して最高次数と最低次数を比べると、2 つの 1 次式 $X + Y$ 、 $X - Y$ は、一方が x の定数倍、他方が y の定数倍でなければならない。順序を含めて 2 通りある。

第 1 の場合を

$$X + Y = \lambda x, \quad X - Y = \frac{2}{\lambda} y$$

とすると

$$X = \frac{\lambda}{2} x + \frac{1}{\lambda} y, \quad Y = \frac{\lambda}{2} x - \frac{1}{\lambda} y.$$

$a = \lambda/2$ と置けば

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ a & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

順序を入れ替えると

$$X + Y = \lambda y, \quad X - Y = \frac{2}{\lambda} x$$

であり、

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2a} \\ -a & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}.$$

いずれも $a \neq 0$ である。

(2) 第 1 の行列族では

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \\ a & -a \end{pmatrix}.$$

この行列の 2 行から作る差の平方が $2xy$ になる条件は

$$a^2 = \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{または} \quad a = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

第 2 の行列族では、逆変換について $(X+Y)(X-Y)$ の xy の係数が負になり、2 にはできない。

したがって

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。曲線全体を移す条件を恒等式へ変える問題で、想定時間は 40 分程度。係数比較と因数分解の 2 方法で 2 つの行列族を導き、逆変換条件で一方を除外した。符号の組合せと $a \neq 0$ を落とさないことが重要である。

【第 4 問】

次の条件を満たす整数 a, b の組のうち、 $\log_a b$ が有理数となるものをすべて求めよ。

$$1 < a < b < a^2 < 100$$

▶ 解法 1：有理指数を同じ整数のべきへ戻す

【方針】

$\log_a b = p/q$ を既約分数で表し、 $b^q = a^p$ から $a = d^q, b = d^p$ を導く。範囲条件で d, q, p を絞る。

【解答】

$$\log_a b = \frac{p}{q}$$

とおく。ただし p, q は互いに素な自然数である。条件 $a < b < a^2$ から

$$1 < \frac{p}{q} < 2.$$

また

$$b^q = a^p.$$

素因数分解の一意性と $(p, q) = 1$ より、ある整数 $d > 1$ を用いて

$$a = d^q, \quad b = d^p$$

と書ける。

$q = 1$ なら $1 < p < 2$ を満たす整数 p はない。したがって $q \geq 2$ である。また $a^2 < 100$ より $a \leq 9$ だから、 $d^q \leq 9$ となる候補だけを調べればよい。

d	q	$q < p < 2q$	$b = d^p$
2	2	$p = 3$	8
2	3	$p = 4, 5$	16, 32
3	2	$p = 3$	27

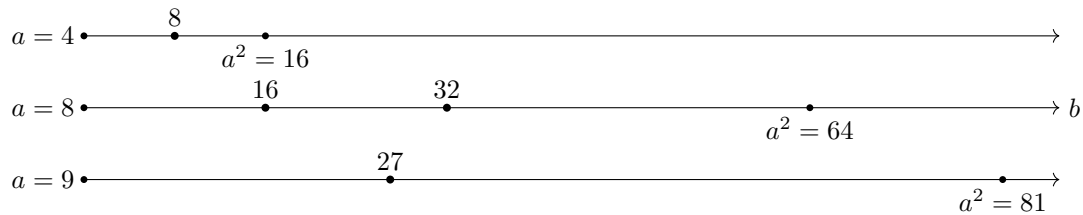
したがって

$$(a, b) = (4, 8), (8, 16), (8, 32), (9, 27).$$

いずれも元の大小関係を満たし、

$$\log_4 8 = \frac{3}{2}, \quad \log_8 16 = \frac{4}{3}, \quad \log_8 32 = \frac{5}{3}, \quad \log_9 27 = \frac{3}{2}$$

である。



▶ 解法 2：素因数の指数ベクトルを比較する

【方針】

a, b の各素因数の指数を並べる。 $\log_a b = p/q$ が有理数なら指数ベクトルが p/q 倍になるので、分母 q は a の全指数の最大公約数を割る。この条件で $2 \leq a \leq 9$ を直接分類する。

【解答】

整数 a の素因数分解を

$$a = r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \cdots r_s^{\alpha_s}$$

とする。 $\log_a b = p/q$ を既約分数とすれば $b^q = a^p$ だから、 b における r_i の指数を β_i として

$$q\beta_i = p\alpha_i$$

がすべての i で成り立つ。よって q は全ての α_i を割る。

$a^2 < 100$ より

$$2 \leq a \leq 9.$$

$a = 2, 3, 5, 6, 7$ では素因数の指数の最大公約数が 1 なので $q = 1$ となる。しかし $1 < p/q < 2$ に反する。残る候補を調べる。

a	$1 < p/q < 2$	$b = a^{p/q}$
$4 = 2^2$	$p/q = 3/2$	8
$8 = 2^3$	$p/q = 4/3, 5/3$	16, 32
$9 = 3^2$	$p/q = 3/2$	27

したがって求める組は

$$(4, 8), (8, 16), (8, 32), (9, 27)$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 4。有理対数を整数のべきの関係へ戻す問題で、想定時間は 25 分程度。同じ底のべき表示と素因数指数の比較の 2 方法で候補を尽くした。 $a^2 < 100$ から $a \leq 9$ 、また指数の分母が 1 では不可能であることが絞り込みの要点である。