

東北大学 1991 年度 文系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

実数 x に対し、行列 $A(x)$ を $A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}$ と定義する.

(1)

$$A(x)A(y) = A(xy) + (x+y-1)A(0)$$

を証明せよ.

(2) n が 2 以上の整数のとき

$$A(x)^n = A(x^n) + (nx^{n-1} - 1)A(0)$$

が成り立つことを証明せよ. ただし

$$A(x)^1 = A(x), \quad A(x)^n = A(x)A(x)^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

とする.

▶ 解法 1：積の恒等式と数学的帰納法

【方針】

(1) は行列の積を直接計算し、右辺 $A(xy) + (x+y-1)A(0)$ と成分ごとに一致することを確認する。(2) は数学的帰納法を使う。基底 $n=2$ は (1) で $y=x$ として確認し、帰納法の段階では (1) に加えて $A(x)A(0) = xA(0)$ を使って係数を整理する。

【解答】

(1) 定義より

$$A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad A(y) = \begin{pmatrix} y-1 & 1 \\ -1 & y+1 \end{pmatrix}$$

である。これらを掛けると

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} (x-1)(y-1)-1 & (x-1)+(y+1) \\ -(y-1)-(x+1) & -1+(x+1)(y+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xy-x-y & x+y \\ -(x+y) & xy+x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

一方

$$A(xy) = \begin{pmatrix} xy-1 & 1 \\ -1 & xy+1 \end{pmatrix}, \quad A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$A(xy) + (x+y-1)A(0) = \begin{pmatrix} xy-x-y & x+y \\ -(x+y) & xy+x+y \end{pmatrix}$$

である。よって $A(x)A(y) = A(xy) + (x+y-1)A(0)$ が成り立つ。

(2) まず $n=2$ のとき、(1) で $y=x$ とおくと $A(x)^2 = A(x^2) + (2x-1)A(0)$ であり、これは求める式 $A(x)^2 = A(x^2) + (2x^1-1)A(0)$ そのものである。

次に、ある $n \geq 2$ で $A(x)^n = A(x^n) + (nx^{n-1}-1)A(0)$ が成り立つと仮定する。このとき $A(x)^{n+1} = A(x)A(x)^n$ であるから $A(x)^{n+1} = A(x)A(x^n) + (nx^{n-1}-1)A(x)A(0)$ である。

ここで (1) より $A(x)A(x^n) = A(x^{n+1}) + (x+x^n-1)A(0)$ である。また直接計算すると $A(x)A(0) = xA(0)$ である。したがって

$$\begin{aligned} A(x)^{n+1} &= A(x^{n+1}) + (x+x^n-1)A(0) + x(nx^{n-1}-1)A(0) \\ &= A(x^{n+1}) + \{x+x^n-1+nx^n-x\}A(0) \\ &= A(x^{n+1}) + \{(n+1)x^n-1\}A(0) \end{aligned}$$

である。よって $n+1$ でも成り立つ。

以上より、数学的帰納法によって、すべての整数 $n \geq 2$ で $A(x)^n = A(x^n) + (nx^{n-1} - 1)A(0)$ が成り立つ。

$$\boxed{A(x) = xE + N} \xrightarrow{\text{積を簡約}} \boxed{N^2 = 0}$$

$$A(x)^n = x^n E + nx^{n-1} N$$

▶ 解法 2：平方すると 0 になる部分を分離する

【方針】

$N = A(0)$ とおくと $N^2 = 0$ 、 $A(x) = xE + N$ である。積では N を 2 個以上含む項が消えるため、(1) も (2) も一度に計算できる。

【解答】

$$N = A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。直接掛けると

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、また

$$A(x) = xE + N$$

である。

(1)

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= (xE + N)(yE + N) \\ &= xyE + (x + y)N \\ &= A(xy) + (x + y - 1)A(0). \end{aligned}$$

(2) $(xE + N)^n$ を展開すると、 $N^2 = 0$ のため N を 2 個以上含む項はすべて 0 である。 N を 1 個だけ含む項は n 個あるので

$$A(x)^n = x^n E + nx^{n-1} N.$$

一方

$$A(x^n) = x^n E + N$$

であるから

$$\begin{aligned} A(x)^n &= A(x^n) + (nx^{n-1} - 1)N \\ &= A(x^n) + (nx^{n-1} - 1)A(0). \end{aligned}$$

これで $n \geq 2$ に対する式が示された。

【総評】 行列積の恒等式を直接計算し、それを帰納法に利用する問題である。目安時間は 16 分。(2) では帰納法の仮定に左から $A(x)$ を掛けるだけでなく、 $A(x)A(0) = xA(0)$ を明示して係数を整理する必要がある。計算量は多くないが、 $(n+1)x^n - 1$ の係数整理を丁寧に書くことが得点点である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 2 問】

実数 r に対して、空間の点 (r, r^2, r^3) を $P(r)$ で表す. さらに、点 $P(r)$ を通り方向ベクトルが $(1, 2r, 3r^2)$, $(0, 2, 6r)$ である 2 本の直線を含む平面を $\pi(r)$ で表す. $abc \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq c$ であるとき、次の問に答えよ.

- (1) 3 点 $P(0)$, $P(a)$, $P(b)$ を通る平面 α の方程式を求めよ.
- (2) 3 つの平面 $\pi(0)$, $\pi(a)$, $\pi(c)$ の共有点 Q の座標を求めよ.
- (3) α が Q を通るための必要十分条件を求めよ.

▶ 解法 1：平面の方程式を順に決める

【方針】

(1) は原点を通る平面 $Ax + By + Cz = 0$ に $P(a), P(b)$ を代入して係数を決める。(2) は、2 つの方向ベクトルから $\pi(r)$ の方程式 $z - 3ry + 3r^2x - r^3 = 0$ を作り、 $r = 0, a, c$ を連立する。(3) では求めた共有点 Q を (1) の平面に代入し、仮定 $abc \neq 0$ を使って必要十分条件を整理する。

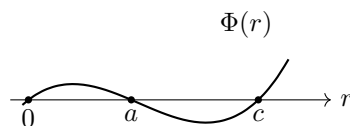
【解答】

(1) 3 点 $P(0), P(a), P(b)$ を通る平面 α は原点 $P(0) = (0, 0, 0)$ を通るので $Ax + By + Cz = 0$ と書ける。 $C \neq 0$ として $C = 1$ とおくと $Ax + By + z = 0$ である。

点 $P(a) = (a, a^2, a^3)$ を代入すると $Aa + Ba^2 + a^3 = 0$ すなわち $A + Ba + a^2 = 0$ である。同様に $P(b)$ を代入して $A + Bb + b^2 = 0$ を得る。2 式を引くと $B(a - b) + a^2 - b^2 = 0$ であり、 $a \neq b$ より $B = -(a + b)$ である。これを戻すと $A = ab$ である。したがって $abx - (a + b)y + z = 0$ である。

(2) 平面 $\pi(r)$ は点 $P(r) = (r, r^2, r^3)$ を通り、方向ベクトル $(1, 2r, 3r^2)$, $(0, 2, 6r)$ を含む。この 2 つの方向に垂直なベクトルとして $(3r^2, -3r, 1)$ を取れる。よって $\pi(r)$ の方程式は $3r^2(x - r) - 3r(y - r^2) + (z - r^3) = 0$ である。整理して $\pi(r) : z - 3ry + 3r^2x - r^3 = 0$ となる。 $r = 0$ では $z = 0$ である。したがって共有点 Q は $z = 0$ を満たす。さらに $r = a, c$ を代入して $-3ay + 3a^2x - a^3 = 0$, $-3cy + 3c^2x - c^3 = 0$ を得る。 $a, c \neq 0$ なので、それぞれ $y = ax - \frac{a^2}{3}$, $y = cx - \frac{c^2}{3}$ である。これらを等しくすると $(a - c)x = \frac{a^2 - c^2}{3}$ である。 $a \neq c$ より $x = \frac{a + c}{3}$ である。したがって $y = a \cdot \frac{a + c}{3} - \frac{a^2}{3} = \frac{ac}{3}$ である。よって $Q = \left(\frac{a + c}{3}, \frac{ac}{3}, 0\right)$ である。

(3) Q が α 上にあるためには、(1) の平面の方程式に Q を代入して 0 になればよい。すなわち $ab \cdot \frac{a + c}{3} - (a + b) \cdot \frac{ac}{3} + 0 = 0$ である。左辺を整理すると $\frac{a}{3}\{b(a + c) - c(a + b)\} = \frac{a}{3}(ab - ac) = \frac{a^2}{3}(b - c)$ である。仮定より $a \neq 0$ だから、これは $b - c = 0$ と同値である。よって必要十分条件は $b = c$ である。



▶ 解法 2 : r の 3 次式として係数を比較する

【方針】

平面 $\pi(r)$ の式を、与えられた点と 2 方向を代入して決める。共有点 $Q = (x, y, z)$ ではその左辺が $r = 0, a, c$ を根にもつ 3 次式になる。因数分解した式との係数比較から Q を一度に求める。

【解答】

(1) $P(0) = (0, 0, 0)$ を通る平面を $Ax + By + z = 0$ とおく。 $P(a), P(b)$ を代入すると

$$A + Ba + a^2 = 0, \quad A + Bb + b^2 = 0.$$

$a \neq b$ より

$$A = ab, \quad B = -(a + b).$$

したがって

$$\alpha : abx - (a + b)y + z = 0.$$

(2) $\pi(r)$ の方程式を

$$Lx + My + Nz + D = 0$$

とする。2 つの方向ベクトルを代入する条件と $P(r)$ を通る条件を解けば

$$\pi(r) : z - 3ry + 3r^2x - r^3 = 0$$

を得る。

共有点を $Q = (x, y, z)$ とする。左辺を r の式とみた

$$\Phi(r) = z - 3ry + 3r^2x - r^3$$

は $r = 0, a, c$ を根にもつ。最高次係数が -1 なので

$$\Phi(r) = -r(r - a)(r - c).$$

係数を比較すると

$$z = 0, \quad 3x = a + c, \quad 3y = ac.$$

よって

$$Q = \left(\frac{a + c}{3}, \frac{ac}{3}, 0 \right).$$

(3) Q を α の式へ代入すると

$$\frac{a^2}{3}(b - c) = 0.$$

$a \neq 0$ だから、必要十分条件は

$$b = c$$

である。

【総評】 空間曲線上の点と接するように定めた平面を、座標計算で処理する問題である。目安時間は 27 分。 $\pi(r)$ の方程式 $z - 3ry + 3r^2x - r^3 = 0$ を正しく作れるかが山場である。(3) は共有点を代入したあと、仮定 $abc \neq 0, a \neq c$ を使って条件を $b = c$ まで落とす。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 3 問】

楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) と第 1 象限の点で接する直線を l とし、 C, l および x 軸, y 軸で囲まれる図形を A とする.

- (1) A の面積を最小にする l の方程式を求めよ.
 (2) (1) で求めた直線 l で定まる図形 A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

▶ 解法 1：接点の三角表示

【方針】

接点を $(a \cos \phi, b \sin \phi)$ と置くと、接線は $x \cos \phi / a + y \sin \phi / b = 1$ と書ける。図形 A の面積は、この接線と座標軸でできる三角形の面積から第 1 象限の楕円部分の面積を引いたものなので、 $\sin \phi \cos \phi$ を最大にすればよい。(2) は最小時の直線でできる円錐から、半楕円体の体積を引く。

【解答】

(1) 接点を $(a \cos \phi, b \sin \phi)$ とおく。ただし第 1 象限の点なので $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ である。楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ のこの点における接線は $\frac{x \cos \phi}{a} + \frac{y \sin \phi}{b} = 1$ である。

この接線の x 切片は $\frac{a}{\cos \phi}$ であり、 y 切片は $\frac{b}{\sin \phi}$ である。したがって、接線と座標軸でできる三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos \phi} \cdot \frac{b}{\sin \phi} = \frac{ab}{2 \sin \phi \cos \phi}$$

である。

一方、第 1 象限にある楕円の部分の面積は、楕円全体の 4 分の 1 だから $\frac{\pi ab}{4}$ である。よって図形 A の面積は $S(\phi) = \frac{ab}{2 \sin \phi \cos \phi} - \frac{\pi ab}{4}$ である。

これを最小にするには、 $\sin \phi \cos \phi$ を最大にすればよい。ここで $\sin \phi \cos \phi \leq \frac{1}{2}$ であり、等号は $\phi = \frac{\pi}{4}$ のときに成り立つ。したがって求める接線は $\frac{x}{a\sqrt{2}} + \frac{y}{b\sqrt{2}} = 1$ すなわち $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2}$ である。

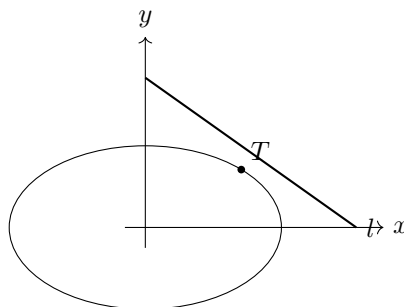
(2) (1) の直線は、 x 切片 $a\sqrt{2}$ 、 y 切片 $b\sqrt{2}$ をもつ。この直線と座標軸でできる三角形を x 軸のまわりに回転すると、高さ $a\sqrt{2}$ 、底面半径 $b\sqrt{2}$ の円錐ができる。その体積は $\frac{1}{3}\pi(b\sqrt{2})^2(a\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi ab^2$ である。

また、第 1 象限の楕円部分を x 軸のまわりに回転すると、半分の楕円体ができる。楕円体全体の体積は、半径方向の長さが a, b, b であるから $\frac{4}{3}\pi ab^2$ であり、その半分は $\frac{2}{3}\pi ab^2$ である。

したがって、求める体積は

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi ab^2 - \frac{2}{3}\pi ab^2 = \frac{2\pi ab^2(\sqrt{2} - 1)}{3}$$

である。



▶ 解法 2：接線の切片を直接最小化する

【方針】

接線を切片形 $x/u + y/v = 1$ とおく。楕円に接する条件は $a^2/u^2 + b^2/v^2 = 1$ である。座標軸と接線の三角形の面積 $uv/2$ を相加相乗平均で最小化する。

【解答】

(1) 第 1 象限で楕円に接する直線を

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1 \quad (u > 0, v > 0)$$

とおく。この直線が楕円に接する条件は

$$\frac{a^2}{u^2} + \frac{b^2}{v^2} = 1$$

である。

$$X = \frac{a}{u}, \quad Y = \frac{b}{v}$$

とおけば $X^2 + Y^2 = 1$ であり、

$$uv = \frac{ab}{XY}.$$

$$2XY \leq X^2 + Y^2 = 1$$

より $uv \geq 2ab$ で、等号は $X = Y = 1/\sqrt{2}$ のときに成り立つ。図形 A の面積は、この接線と座標軸でできる三角形から一定の楕円の第 1 象限部分を引いたものなので、同じときに最小となる。よって

$$u = a\sqrt{2}, \quad v = b\sqrt{2},$$

したがって

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt{2}.$$

(2) 接線と座標軸の三角形を回転すると、高さ $a\sqrt{2}$ 、底面半径 $b\sqrt{2}$ の円錐になる。その体積は

$$\frac{1}{3}\pi(b\sqrt{2})^2(a\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi ab^2.$$

楕円の第 1 象限部分を回転したものは、半径 a, b, b の楕円体の半分で、体積は

$$\frac{2}{3}\pi ab^2.$$

したがって求める体積は

$$\frac{2\pi ab^2(\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

【総評】 楕円の接線、面積最小、回転体体積が一続きになった問題である。目安時間は 24 分。接点を $(a \cos \phi, b \sin \phi)$ と置くと、接線と切片が一気に整理できる。面積最小は $\sin \phi \cos \phi \leq 1/2$ に帰着する。(2) は「円錐から半楕円体を引く」と見れば、積分なしで短く計算できる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 4 問】

次の 3 つの命題が正しいかどうかを調べよ。

- (1) 点 $(\sin 2\theta, \cos 2\theta, 2 \cos \theta)$ は θ の値によらず同一平面上にある。
- (2) 点 $(\sin 2\theta, \cos 2\theta, 2 \cos \theta)$ は θ の値によらず同一球面上にある。
- (3) 点 $(t, \log_2(1 + 4^t), \log_2(2^t + 2^{-t}))$ は t の値によらず同一平面上にある。

▶ 解法 1：平面・球面の方程式へ代入

【方針】

(1) は平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ に全ての点があると仮定し、複数の θ を代入して係数がすべて 0 になることを示せば反例になる。(2) は $x^2 + y^2 = 1$ と $z^2 = 2(1 + y)$ を組み合わせて球面の方程式を作る。(3) は $u = 2^t$ と置き、対数の性質で 3 座標の間の一次関係を見つける。

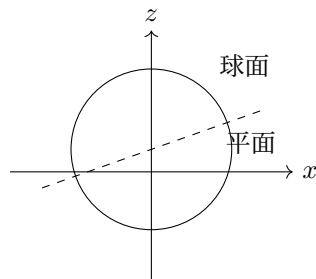
【解答】

(1) 点がすべて同一平面上にあると仮定する。その平面を $Ax + By + Cz + D = 0$ とする。この平面にすべての点 $(\sin 2\theta, \cos 2\theta, 2 \cos \theta)$ があるなら $A \sin 2\theta + B \cos 2\theta + 2C \cos \theta + D = 0$ がすべての θ で成り立つ。 $\theta = 0$ を代入すると $B + 2C + D = 0$ である。 $\theta = \pi$ を代入すると $B - 2C + D = 0$ である。これらを引いて $C = 0$ を得る。さらに $B + D = 0$ である。 $\theta = \pi/2$ を代入すると $-B + D = 0$ である。これと $B + D = 0$ から $B = D = 0$ である。最後に $\theta = \pi/4$ を代入すると $A = 0$ である。

したがって平面の係数がすべて 0 になってしまい、平面を定められない。よって命題 (1) は正しくないである。

(2) $x = \sin 2\theta$, $y = \cos 2\theta$, $z = 2 \cos \theta$ とおく。まず $x^2 + y^2 = \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ である。また $z^2 = 4 \cos^2 \theta = 2(1 + \cos 2\theta) = 2(1 + y)$ である。したがって $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 3 = 0$ が成り立つ。これは $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$ と書けるので、同一球面上にある。よって命題 (2) は正しいである。

(3) $u = 2^t$ とおく。このとき $4^t = u^2$ であり、また $t = \log_2 u$ である。第 2 座標を Y 、第 3 座標を Z とすると $Y = \log_2(1 + u^2)$ である。一方 $Z = \log_2(u + u^{-1}) = \log_2 \frac{u^2 + 1}{u} = \log_2(1 + u^2) - \log_2 u = Y - t$ である。したがって $Y - t - Z = 0$ である。座標を (X, Y, Z) と書けば $X = t$ なので $Y - X - Z = 0$ という平面上にある。よって命題 (3) は正しいである。



▶ 解法 2：対称なパラメータ値を比べる

【方針】

(1) は θ と $-\theta$ 、 $\pi - \theta$ を比べ、仮に平面があれば各係数が 0 になることを示す。(2) は三角関数を消去して球面の式を作る。(3) は $u = 2^t$ において対数の差を整理する。

【解答】

(1) すべての点が平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

上にあると仮定する。点の式を代入し、 θ と $-\theta$ の式を引くと

$$2A \sin 2\theta = 0$$

がすべての θ で成り立つので $A = 0$ である。

次に θ と $\pi - \theta$ の式を引くと

$$4C \cos \theta = 0$$

より $C = 0$ である。残りは $B \cos 2\theta + D = 0$ であり、 $\theta = 0, \pi/2$ を代入すると $B = D = 0$ となる。これは平面を定めないので、命題は正しくない。

(2)

$$x = \sin 2\theta, \quad y = \cos 2\theta, \quad z = 2 \cos \theta$$

とおくと

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 = 2(1 + y).$$

よって

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4.$$

したがって中心 $(0, 1, 0)$ 、半径 2 の同一球面上にあり、命題は正しい。

(3) $u = 2^t$ とおく。第 2、第 3 座標を Y, Z とすれば

$$\begin{aligned} Z &= \log_2(u + u^{-1}) \\ &= \log_2(1 + u^2) - \log_2 u \\ &= Y - t. \end{aligned}$$

第 1 座標を $X = t$ と書けば

$$Y - X - Z = 0.$$

したがって同一平面上にあり、命題は正しい。

【総評】 3 つの命題を、恒等的な関係式の有無で判定する問題である。目安時間は 18 分。(1) は「平面がある」と仮定して数個の角を代入し、係数がすべて 0 になることを示すと明快である。(2) は $z^2 = 2(1 + y)$ 、(3) は $\log_2(u + u^{-1}) = \log_2(1 + u^2) - \log_2 u$ が決定的な変形である。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。