

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1991 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

曲線 $C : xy + \sqrt{5}(x - y) + 4 = 0$ の原点を通る 2 つの接線を l_1, l_2 とする. C と l_1, l_2 によって囲まれる図形の面積を求めよ.

第 2 問

$f(t)$, $g(t)$ は微分可能な関数とし, 行列

$$A(t) = f(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + g(t) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

はすべての実数 s , t に対して, 次の 2 つの条件を満たすとする.

(i) $A(s+t) = A(s)A(t)$

(ii) $A(t)$ の表す 1 次変換は双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ 上の任意の点を C 上に移す.

このとき $f(t)$, $g(t)$ はどのような関数か.

第 3 問

- (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正方形の 1 つの頂点の座標を (p, q) とするとき、残りの頂点の座標を p と q で表せ.
- (2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) とする. 曲線 $y = f(x)$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ と 4 点のみを共有し、これらの 4 点は、ある正方形の頂点になっている. $f(x)$ を求めよ.

第 4 問

n を正の整数とする. 箱の中に 3^n 枚のカードが入っていて, これらのカードには 1 から 3^n までの番号がつけてある. この箱から無作為に 1 枚のカードを取り出し, その番号を X とする. 次に, このカードを箱の中に戻し, ふたたび無作為に 1 枚のカードを取り出して, その番号を Y とする. このようにして得られた整数の組 (X, Y) について, 「 X と Y の積 XY は 3^n で割り切れる」という事象を A とする.

- (1) $0 \leq j \leq n$ である整数 j に対し, 「 Y は 3^j で割り切れるが 3^{j+1} では割り切れない」という事象を B_j とおく. 事象 $A \cap B_j$ が起こる確率 $P(A \cap B_j)$ を求めよ.
- (2) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ.
- (3) 事象 A が起こったときに事象 B_n が起こる条件つき確率を $P_A(B_n)$ とするとき, $\frac{1}{3} \leq P_A(B_n) < \frac{1}{2}$ が成立するような n の値を求めよ.

第 5 問

(1) $0 < x < 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\log x > 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

(2) 曲線 $y = x(\log x - 1)$ ($x > 0$) の概形をかけ．

(3) 直線 $x = b$ ($0 < b < 1$)， $y = 0$ および曲線 $y = x(\log x - 1)$ で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(b)$ とする． $\lim_{b \rightarrow 0} V(b)$ を求めよ．

第 6 問

a を実数とし、点 $(1, -1)$ を点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ に、点 $(1, 1)$ を点 $(2a - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2a)$ に移す 1 次変換を f とする。さらに、直線 $l: x + y = 1$ 上の点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように帰納的に定める。

- (i) 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を P_1 とする。
- (ii) P_n を f で移した点を P'_n とし、原点 O と P'_n を通る直線が l と交わる点を P_{n+1} とする。

このとき

- (1) $|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}|$ を a と n で表せ。
- (2) $|\overrightarrow{P_1 P_8}| = \frac{635}{\sqrt{2}}$ となるような a の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)