

東北大学 1991 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $C: xy + \sqrt{5}(x - y) + 4 = 0$ の原点を通る 2 つの接線を l_1, l_2 とする. C と l_1, l_2 によって囲まれる図形の面積を求めよ.

▶ 解法 1：接線の傾きと定積分

【方針】

原点を通る接線を $y = mx$ とおき、曲線に代入した 2 次方程式が重解をもつ条件から 2 本の接線の傾きを求める。接点の x 座標を出したら、曲線を y について解き、左側では曲線と傾き $1/5$ の直線、右側では曲線と傾き 5 の直線で囲まれる面積を積分する。

【解答】

原点を通る直線を $y = mx$ とおく。これを曲線 $xy + \sqrt{5}(x - y) + 4 = 0$ に代入すると $mx^2 + \sqrt{5}(1 - m)x + 4 = 0$ となる。この直線が接線であるためには、この 2 次方程式が重解をもてばよい。したがって判別式は 0 であり $5(1 - m)^2 - 16m = 0$ である。整理すると $5m^2 - 26m + 5 = 0$ だから $m = 5, \frac{1}{5}$ である。

接点の x 座標を求める。重解は $x = -\frac{\sqrt{5}(1 - m)}{2m}$ である。よって、 $m = 1/5$ のとき $x = -2\sqrt{5}$ であり、 $m = 5$ のとき $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ である。

曲線を y について解くと $y = \frac{-\sqrt{5}x - 4}{x - \sqrt{5}}$ である。左側の接点から原点までは直線 $y = x/5$ と曲線で囲まれ、原点から右側の接点までは直線 $y = 5x$ と曲線で囲まれる。したがって求める面積 S は

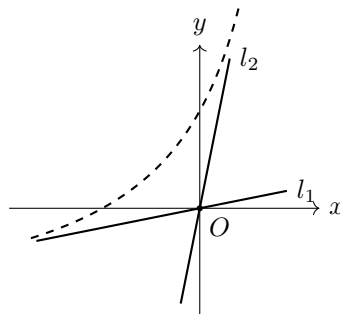
$$S = \int_{-2\sqrt{5}}^0 \left\{ \frac{-\sqrt{5}x - 4}{x - \sqrt{5}} - \frac{x}{5} \right\} dx + \int_0^{2\sqrt{5}/5} \left\{ \frac{-\sqrt{5}x - 4}{x - \sqrt{5}} - 5x \right\} dx$$

である。

ここで $\frac{-\sqrt{5}x - 4}{x - \sqrt{5}} = -\sqrt{5} - \frac{9}{x - \sqrt{5}}$ である。これを用いて積分すると

$$\begin{aligned} S &= \left[-\sqrt{5}x - 9 \log |x - \sqrt{5}| - \frac{x^2}{10} \right]_{-2\sqrt{5}}^0 \\ &\quad + \left[-\sqrt{5}x - 9 \log |x - \sqrt{5}| - \frac{5}{2}x^2 \right]_0^{2\sqrt{5}/5} \\ &= 9 \log 5 - 12 \end{aligned}$$

である。よって求める面積は $9 \log 5 - 12$ である。



▶ 解法 2：接点条件を先に解く

【方針】

接点 (x, y) での接線が原点を通る条件を、陰関数の微分係数 y/x と一致させて表す。曲線の式と連立して 2 接点を直接求め、最後に曲線を y の式へ直して面積を積分する。

【解答】

曲線上の点 (x, y) における微分係数は、陰関数を微分して

$$y + (x - \sqrt{5})y' + \sqrt{5} = 0$$

より

$$y' = -\frac{y + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}}$$

である。接線が原点を通るなら $y' = y/x$ だから

$$2xy + \sqrt{5}(x - y) = 0.$$

これと曲線の式

$$xy + \sqrt{5}(x - y) + 4 = 0$$

を連立すると

$$xy = 4, \quad \sqrt{5}(x - y) = -8.$$

したがって接点は

$$(-2\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}), \quad (2/\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$$

であり、接線はそれぞれ

$$y = \frac{x}{5}, \quad y = 5x$$

である。

曲線を

$$y = -\sqrt{5} - \frac{9}{x - \sqrt{5}}$$

と書く。求める面積は

$$S = \int_{-2\sqrt{5}}^0 \left(-\sqrt{5} - \frac{9}{x - \sqrt{5}} - \frac{x}{5} \right) dx \\ + \int_0^{2/\sqrt{5}} \left(-\sqrt{5} - \frac{9}{x - \sqrt{5}} - 5x \right) dx.$$

それぞれの原始関数へ端点を代入すると

$$S = 9 \log 5 - 12.$$

【総評】 原点から引いた 2 本の接線と曲線で囲まれる面積を求める問題である。目安時間は 25 分。接線条件は $y = mx$ を代入した 2 次方程式の判別式で処理する。面積計算では、接点が原点の左右に分かれるため積分区間を $[-2\sqrt{5}, 0]$ と $[0, 2\sqrt{5}/5]$ に分けるのが重要である。対数項の絶対値と係数 9 を落とさないようにしたい。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 2 問】

$f(t), g(t)$ は微分可能な関数とし、行列

$$A(t) = f(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + g(t) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

はすべての実数 s, t に対して、次の 2 つの条件を満たすとする。

- (i) $A(s+t) = A(s)A(t)$
- (ii) $A(t)$ の表す 1 次変換は双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ 上の任意の点を C 上に移す。

このとき $f(t), g(t)$ はどのような関数か。

▶ 解法 1：和と差の座標

【方針】

座標を $u = x + y, v = x - y$ に取り替えると、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ は $uv = 1$ と書ける。また与えられた行列は u を $2f(t)u, v$ を $2g(t)v$ に変える。条件 $A(s+t) = A(s)A(t)$ は 2 つの倍率の積の法則になり、双曲線を保つ条件は倍率の積が 1 であることになる。微分可能性から指数関数形を導く。

【解答】

$u = x + y, v = x - y$ とおく。このとき $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = uv$ である。したがって双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ は $uv = 1$ と表される。

行列 $A(t)$ の働きを u, v で見る。まず

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}$$

であり、また

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}$$

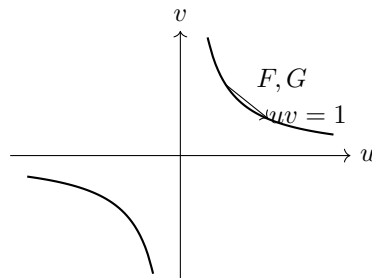
である。したがって、移った点の新しい u, v を u', v' とすると $u' = 2f(t)u, v' = 2g(t)v$ である。

ここで $F(t) = 2f(t), G(t) = 2g(t)$ とおく。条件 $A(s+t) = A(s)A(t)$ は、 u と v の倍率について $F(s+t) = F(s)F(t), G(s+t) = G(s)G(t)$ を意味する。

また、 $A(t)$ が双曲線 $uv = 1$ 上の任意の点を再び $uv = 1$ 上に移すためには $u'v' = uv$ でなければならない。 $uv = 1$ であるから $F(t)G(t) = 1$ である。したがって $F(t), G(t)$ は 0 にならない。

特に $F(0) = F(0)^2$ で、 $F(0) \neq 0$ だから $F(0) = 1$ である。 F は微分可能なので、等式 $F(s+t) = F(s)F(t)$ を s で微分し、 $s = 0$ とおくと $F'(t) = F'(0)F(t)$ である。 $c = F'(0)$ とおけば $F'(t) = cF(t), F(0) = 1$ であるから $F(t) = e^{ct}$ である。

さらに $F(t)G(t) = 1$ より $G(t) = e^{-ct}$ である。したがって $f(t) = \frac{1}{2}e^{ct}, g(t) = \frac{1}{2}e^{-ct}$ である。ただし c は任意の実数である。



▶ 解法 2：積の法則を対数へ移す

【方針】

方向 $(1, 1)$ 、 $(1, -1)$ がそれぞれ何倍になるかを直接調べる。双曲線を保つ条件から 2 倍率の積が 1 と分かる。正の倍率の対数を取り、加法を満たす微分可能関数が 1 次関数であることから指数関数形を得る。

【解答】

$$e_+ = (1, 1), \quad e_- = (1, -1)$$

とする。与えられた行列をこれらへ作用させると

$$A(t)e_+ = 2f(t)e_+, \quad A(t)e_- = 2g(t)e_-.$$

そこで

$$F(t) = 2f(t), \quad G(t) = 2g(t)$$

とおく。条件 (i) から

$$F(s+t) = F(s)F(t), \quad G(s+t) = G(s)G(t).$$

任意の点を

$$(x, y) = \frac{x+y}{2}e_+ + \frac{x-y}{2}e_-$$

と表すと、変換後には $x+y$ が $F(t)$ 倍、 $x-y$ が $G(t)$ 倍になる。双曲線は

$$(x+y)(x-y) = 1$$

であるから、条件 (ii) は

$$F(t)G(t) = 1$$

を与える。特に $F(t) \neq 0$ であり、積の法則と連続性から $F(t) > 0$ である。

$H(t) = \log F(t)$ とおくと

$$H(s+t) = H(s) + H(t).$$

H は微分可能なので、 s で微分して

$$H'(s+t) = H'(s).$$

$s = 0$ とすれば $H'(t) = H'(0) = c$ となる。 $H(0) = 0$ より

$$H(t) = ct, \quad F(t) = e^{ct}.$$

また $G(t) = 1/F(t) = e^{-ct}$ である。したがって

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{ct}, \quad g(t) = \frac{1}{2}e^{-ct}$$

であり、 c は任意の実数である。

【総評】 行列の形をそのまま計算するより、 $u = x+y$ 、 $v = x-y$ に分けるのが決定的である。目安時間は 24 分。双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ が $uv = 1$ になるため、倍率 $F = 2f$ 、 $G = 2g$ は $FG = 1$ を満たす。さらに $F(s+t) = F(s)F(t)$ と微分可能性から指数関数になる流れを、途中の $F'(t) = F'(0)F(t)$ まで書くと答案として強い。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 3 問】

- (1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ に内接する正方形の 1 つの頂点の座標を (p, q) とするとき、残りの頂点の座標を p と q で表せ。
 (2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) とする。曲線 $y = f(x)$ は円 $x^2 + y^2 = 1$ と 4 点のみを共有し、これらの 4 点は、ある正方形の頂点になっている。 $f(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1：正方形の対称性と交点因子

【方針】

(1) は円の中心が原点なので、正方形の頂点は 90 度ずつ回転した点として表せる。(2) では 4 頂点がグラフ上にあるため、同じ x に 2 つの y が来る場合を除き、3 次関数は奇関数型 $Ax^3 + Cx$ になる。4 点を通る条件で A, C を決め、円との交点方程式に余分な実根が出ない条件から $\{p^2, q^2\} = \{1/4, 3/4\}$ を導く。

【解答】

(1) 円 $x^2 + y^2 = 1$ の中心は原点である。円に内接する正方形の中心も原点であり、隣り合う頂点は原点のまわりに 90 度回転して得られる。

点 (p, q) を 90 度ずつ回転すると $(-q, p)$, $(-p, -q)$, $(q, -p)$ である。したがって残りの頂点は $(-q, p)$, $(-p, -q)$, $(q, -p)$ である。

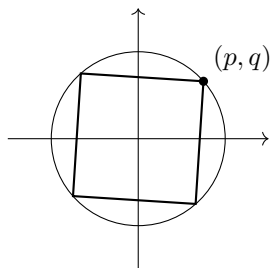
(2) (1) の 4 点が曲線 $y = f(x)$ 上にあるとする。もし $p = 0$ または $q = 0$ なら、同じ x 座標に異なる 2 つの y 座標をもつ点が現れるので、関数のグラフにはならない。また $p^2 = q^2$ の場合も同様に、同じ x に異なる y が対応する。したがって $pq(p^2 - q^2) \neq 0$ である。

4 点は原点に関して対称な 2 組の点であるから、これらを通る 3 次関数は $f(x) = Ax^3 + Cx$ の形になる。条件 $f(p) = q$, $f(q) = -p$ より $Ap^2 + C = \frac{q}{p}$, $Aq^2 + C = -\frac{p}{q}$ である。差をとると $A(p^2 - q^2) = \frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{1}{pq}$ であるから $A = \frac{1}{pq(p^2 - q^2)}$ である。さらに $C = -\frac{p^4 + q^4}{pq(p^2 - q^2)}$ となる。よって $f(x) = \frac{x\{x^2 - (p^4 + q^4)\}}{pq(p^2 - q^2)}$ である。

円との共有点を調べるために $x^2 + f(x)^2 = 1$ を考える。 $z = x^2$ とおくと、整理により $(z^2 - z + p^2q^2)(z + 4p^2q^2 - 1) = 0$ となる。第 1 因子は $z^2 - z + p^2q^2 = (z - p^2)(z - q^2)$ であり、これは正方形の 4 頂点に対応する。

曲線と円がこの 4 点のみを共有するためには、もう 1 つの因子から出る $z = 1 - 4p^2q^2$ が新しい正の値を与えてはならない。ここで $p^2 + q^2 = 1$ なので $1 - 4p^2q^2 = (p^2 - q^2)^2$ である。したがって $(p^2 - q^2)^2 = p^2$ または $(p^2 - q^2)^2 = q^2$ でなければならない。 $r = p^2, q^2 = 1 - r$ とおくと、この条件から $\{p^2, q^2\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ を得る。このとき $p^4 + q^4 = \frac{5}{8}$, $|pq(p^2 - q^2)| = \frac{\sqrt{3}}{8}$

である。分母の符号により 2 通りが生じるので $f(x) = \frac{8x^3 - 5x}{\sqrt{3}}$ または $f(x) = -\frac{8x^3 - 5x}{\sqrt{3}}$ である。



▶ 解法 2：4 点を根にもつ多項式

【方針】

正方形の頂点を $(p, q), (-q, p), (-p, -q), (q, -p)$ と書く。原点对称な 4 点を通る 3 次関数が奇関数になることを係数比較で示す。円との交点条件を $z = x^2$ の 3 次式として因数分解し、余分な根が既存の 2 根と一致する条件を調べる。

【解答】

(1) 原点中心の 90 度回転を順に行えば、残りの 3 頂点は

$$(-q, p), \quad (-p, -q), \quad (q, -p)$$

である。

(2) 4 点が関数のグラフ上にあるため

$$pq(p^2 - q^2) \neq 0.$$

$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ とする。点 $(p, q), (-p, -q)$ を代入した 2 式を加え、同様に $(q, -p), (-q, p)$ の 2 式を加えると

$$Bp^2 + D = 0, \quad Bq^2 + D = 0.$$

$p^2 \neq q^2$ より $B = D = 0$ である。したがって $f(x) = Ax^3 + Cx$ である。

$$f(p) = q, \quad f(q) = -p, \quad p^2 + q^2 = 1$$

を解くと

$$A = \frac{1}{pq(p^2 - q^2)}, \quad C = -\frac{p^4 + q^4}{pq(p^2 - q^2)}.$$

$z = x^2$ とおいて円との交点条件 $x^2 + f(x)^2 = 1$ を整理すると

$$(z - p^2)(z - q^2)\{z - (p^2 - q^2)^2\} = 0.$$

共有点が 4 点だけであるには、第 3 の根が p^2 または q^2 と一致しなければならない。 $r = p^2, q^2 = 1 - r$ とおけば

$$(2r - 1)^2 = r$$

または

$$(2r - 1)^2 = 1 - r.$$

$pq(p^2 - q^2) \neq 0$ に反する解を除くと

$$\{p^2, q^2\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}.$$

よって

$$p^4 + q^4 = \frac{5}{8}, \quad |pq(p^2 - q^2)| = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

分母の符号に応じて

$$f(x) = \frac{8x^3 - 5x}{\sqrt{3}}$$

または

$$f(x) = -\frac{8x^3 - 5x}{\sqrt{3}}$$

となる。

【総評】 円に内接する正方形と 3 次関数の共有点条件を結びつける難問である。目安時間は 32 分。前半は 90 度回転で頂点を表せばよいが、後半は 4 点を通る 3 次関数を $Ax^3 + Cx$ と置ける理由、そして円との交点方程式に余分な実根が出ない条件を書く必要がある。 $p = 0, q = 0, p^2 = q^2$ の除外も答案の安定に効く。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 4 問】

n を正の整数とする. 箱の中に 3^n 枚のカードが入っていて, これらのカードには 1 から 3^n までの番号がつけてある. この箱から無作為に 1 枚のカードを取り出し, その番号を X とする. 次に, このカードを箱の中に戻し, ふたたび無作為に 1 枚のカードを取り出して, その番号を Y とする. このようにして得られた整数の組 (X, Y) について, 「 X と Y の積 XY は 3^n で割り切れる」という事象を A とする.

- (1) $0 \leq j \leq n$ である整数 j に対し, 「 Y は 3^j で割り切れるが 3^{j+1} では割り切れない」という事象を B_j とおく. 事象 $A \cap B_j$ が起こる確率 $P(A \cap B_j)$ を求めよ.
- (2) 事象 A が起こる確率 $P(A)$ を求めよ.
- (3) 事象 A が起こったときに事象 B_n が起こる条件つき確率を $P_A(B_n)$ とするとき, $\frac{1}{3} \leq P_A(B_n) < \frac{1}{2}$ が成立するような n の値を求めよ.

▶ 解法 1 : 3 の指数による場合分け

【方針】

3 で割れる回数に注目する. 事象 B_j は, Y がちょうど 3^j で割れることを表すので, そのような Y の個数を数える. XY が 3^n で割り切れるには, Y 側で足りない 3 の個数を X 側が補えばよい. 各 j について X の個数を数え, 最後に $j = 0, 1, \dots, n$ で和をとる.

【解答】

(1) $0 \leq j < n$ の場合を考える. Y が 3^j で割り切れるが 3^{j+1} では割り切れないためには, 1 から 3^n までの中で 3^j の倍数の個数 - 3^{j+1} の倍数の個数 を数えればよい. これは $3^{n-j} - 3^{n-j-1} = 2 \cdot 3^{n-j-1}$ 個である.

このとき XY が 3^n で割り切れるためには, X が少なくとも 3^{n-j} で割り切れればよい. 1 から 3^n までの中で 3^{n-j} の倍数は 3^j 個である. したがって

$$P(A \cap B_j) = \frac{(2 \cdot 3^{n-j-1}) \cdot 3^j}{3^n \cdot 3^n} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

である.

次に $j = n$ の場合, Y は 3^n で割り切れる. 範囲内ではそのような Y は $Y = 3^n$ の 1 つだけである. このとき X は何でも XY は 3^n で割り切れる. よって $P(A \cap B_n) = \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}$ である.

したがって

$$P(A \cap B_j) = \frac{2}{3^{n+1}} \quad (0 \leq j < n), \quad P(A \cap B_n) = \frac{1}{3^n}$$

である.

(2) 事象 $B_0, B_1, \dots, B_n$ は互いに重ならず, すべての場合を尽くしている. したがって

$$P(A) = \sum_{j=0}^n P(A \cap B_j)$$

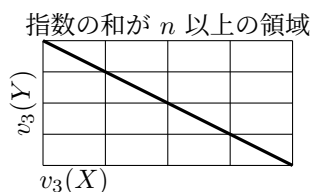
である. (1) より

$$P(A) = n \cdot \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} = \frac{2n}{3^{n+1}} + \frac{3}{3^{n+1}} = \frac{2n+3}{3^{n+1}}$$

である.

(3) 条件つき確率は $P_A(B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)}$ である. よって $P_A(B_n) = \frac{1/3^n}{(2n+3)/3^{n+1}} = \frac{3}{2n+3}$ である.

これが $\frac{1}{3} \leq \frac{3}{2n+3} < \frac{1}{2}$ を満たす条件を求める. 左側の不等式から $2n+3 \leq 9$ すなわち $n \leq 3$ である. 右側の不等式から $6 < 2n+3$ すなわち $n > \frac{3}{2}$ である. n は正の整数なので $n = 2, 3$ である.



▶ 解法 2：3 の指数の組を数える

【方針】

1 から 3^n の整数を、含む 3 の因数の個数で階層に分ける。事象 A は 2 枚の指数の和が n 以上であること。各階層の個数を用いて、条件付きの場合と全体的場合を同じ表から数える。

【解答】

N_r を、1 から 3^n のうち「 3^r で割り切れるが 3^{r+1} では割り切れない」整数の個数とする。すると

$$N_r = 2 \cdot 3^{n-r-1} \quad (0 \leq r < n), \quad N_n = 1.$$

(1) B_j のもとで Y が含む 3 の因数はちょうど j 個である。 XY が 3^n で割り切れるには、 X が 3^{n-j} の倍数であればよく、その個数は 3^j である。よって $j < n$ では

$$P(A \cap B_j) = \frac{N_j 3^j}{3^{2n}} = \frac{2}{3^{n+1}}.$$

$j = n$ では $Y = 3^n$ の 1 通りで、 X は任意だから

$$P(A \cap B_n) = \frac{1}{3^n}.$$

(2) $B_0, \dots, B_n$ は全体を分割するので

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} \\ &= \frac{2n+3}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

(3)

$$P_A(B_n) = \frac{P(A \cap B_n)}{P(A)} = \frac{3}{2n+3}.$$

したがって

$$\frac{1}{3} \leq \frac{3}{2n+3} < \frac{1}{2}$$

を解くと

$$\frac{3}{2} < n \leq 3.$$

n は正の整数なので

$$n = 2, 3.$$

【総評】 3 で割れる回数を分類して数える確率問題である。目安時間は 24 分。 B_j の個数は、 3^j の倍数から 3^{j+1} の倍数を引くのが基本である。 $j = n$ だけは $Y = 3^n$ の 1 通りになり、 X が自由になるため別扱いが必要である。(3) は条件つき確率の分子分母を明確にしてから一次不等式に落とす。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 5 問】

(1) $0 < x < 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\log x > 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

(2) 曲線 $y = x(\log x - 1)$ ($x > 0$) の概形をかけ。

(3) 直線 $x = b$ ($0 < b < 1$)、 $y = 0$ および曲線 $y = x(\log x - 1)$ で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(b)$ とする。 $\lim_{b \rightarrow 0} V(b)$ を求めよ。

▶ 解法 1：水平断面の円板・円環

【方針】

曲線 $h(x) = x(\log x - 1)$ の増減を調べる。回転体は水平断面で円板または円環になるので、左枝・右枝の逆関数を記号で表し、円板法で体積を立てる。逆関数を陽に解かず、曲線上で $dy = h'(x)dx = \log x dx$ と変数を戻して極限を計算する。

【解答】

(1)

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

とおく。 $0 < x < 1$ より $u > 1$ であり、

$$\log x = -2 \log u, \quad 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 2(1 - u).$$

したがって、示すべき不等式は

$$\log u < u - 1$$

と同値である。 $H(u) = u - 1 - \log u$ とおけば

$$H'(u) = 1 - \frac{1}{u} > 0 \quad (u > 1),$$

かつ $H(1) = 0$ である。よって $H(u) > 0$ となり、求める不等式が成り立つ。

(2)

$$h(x) = x(\log x - 1) \quad (x > 0)$$

とおくと

$$h'(x) = \log x, \quad h''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

したがって $0 < x < 1$ では減少し、 $x > 1$ では増加して、

$$h(1) = -1$$

が最小値である。また $h(e) = 0$ であり、

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = 0$$

である。ゆえに曲線は原点へ下側から近づき、 $(1, -1)$ で最小となり、 $(e, 0)$ で x 軸と交わる。

(3) $0 < b < 1$ のとき、囲まれる領域は

$$b \leq x \leq e, \quad h(x) \leq y \leq 0$$

である。各 $y \in [-1, 0]$ に対し、曲線の左枝と右枝の x 座標を $x_-(y), x_+(y)$ とする。水平断面を y 軸のまわりに回すと円板または円環になるから、

$$\begin{aligned} \frac{V(b)}{\pi} &= \int_{-1}^{h(b)} \{x_+(y)^2 - x_-(y)^2\} dy \\ &\quad + \int_{h(b)}^0 \{x_+(y)^2 - b^2\} dy. \end{aligned}$$

曲線上では $dy = h'(x)dx = \log x dx$ なので、

$$\frac{V(b)}{\pi} = \int_1^e x^2 \log x dx - \int_1^b x^2 \log x dx - b^2 \{0 - h(b)\}.$$

ここで

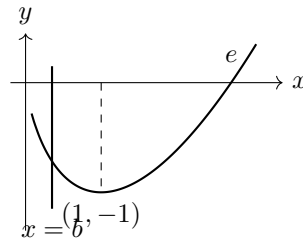
$$\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{x^3}{9}.$$

また $b^2 h(b) = b^3 (\log b - 1) \rightarrow 0$ である。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0+} \frac{V(b)}{\pi} &= \left(\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \right) - \frac{1}{9} \\ &= \frac{2e^3}{9}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{b \rightarrow 0+} V(b) = \frac{2\pi e^3}{9}.$$



▶ 解法 2：円板法を部分積分で整理する

【方針】

水平断面の円板・円環の体積を、曲線の左右 2 枝に沿う積分として書く。部分積分を用いると、逆関数を消して x の定積分へまとめられる。端の小さな穴が極限で消えることも確認する。

【解答】

(1)

$$H(u) = u - 1 - \log u$$

とおけば $u > 1$ で $H'(u) > 0$ 、 $H(1) = 0$ である。ここへ $u = 1/\sqrt{x}$ を入れると (1) の不等式を得る。

(2) また $h(x) = x(\log x - 1)$ は

$$h'(x) = \log x$$

より $(0, 1)$ で減少、 $(1, \infty)$ で増加する。最小点は $(1, -1)$ 、 x 軸との交点は $(e, 0)$ 、 $x \rightarrow 0+$ では下側から原点へ近づく。

(3) 水平断面の円板法で体積を表し、左右の枝に沿って部分積分すると

$$\frac{V(b)}{\pi} = 2 \int_b^e x \{-h(x)\} \, dx$$

を得る。この式は円板・円環の面積 $\pi(R^2 - r^2)$ を y について積分し、

$$\int x^2 \, dy = x^2 y - \int 2xy \, dx$$

としたものであり、円板法そのものである。

したがって

$$\begin{aligned} V(b) &= 2\pi \int_b^e x^2 (1 - \log x) \, dx \\ &= 2\pi \left[x^3 \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \log x \right) \right]_b^e \\ \lim_{b \rightarrow 0+} b^3 \log b &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0+} V(b) &= 2\pi e^3 \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi e^3}{9}. \end{aligned}$$

【総評】 対数曲線の増減と回転体を結ぶ問題である。領域は直線 $x = b$ から曲線の零点 $x = e$ までであり、旧解答の $0 \leq x \leq b$ という積分区間と答え 0 は誤りである。高校数学の円板・円環法から左右の枝を扱い、逆関数を陽に解かず $dy = \log x dx$ で積分を戻す。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。

【第 6 問】

a を実数とし、点 $(1, -1)$ を点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ に、点 $(1, 1)$ を点 $(2a - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2a)$ に移す 1 次変換を f とする。さらに、直線 $l: x + y = 1$ 上の点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように帰納的に定める。

(i) 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を P_1 とする。

(ii) P_n を f で移した点を P'_n とし、原点 O と P'_n を通る直線が l と交わる点を P_{n+1} とする。

このとき

(1) $|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}|$ を a と n で表せ。

(2) $|\overrightarrow{P_1 P_8}| = \frac{635}{\sqrt{2}}$ となるような a の値を求めよ。

▶ 解法 1：直線上の座標と固定点

【方針】

前期文系第 4 問と同じ構造だが、 a により 1 次変換が変わる。点 $P_n = (u_n, 1 - u_n)$ を、基底 $(1, -1), (1, 1)$ の組み合わせとして表すと、移った点を直接計算できる。原点と移った点を結ぶ直線が $x + y = 1$ と交わる条件から $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{2}a - 2$ を得て、固定点からのずれで解く。

【解答】

(1) 直線 $l: x + y = 1$ 上の点 P_n を $P_n = (u_n, 1 - u_n)$ とおく。この点は $(u_n, 1 - u_n) = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)(1, -1) + \frac{1}{2}(1, 1)$ と表せる。

1 次変換 f は $(1, -1) \mapsto (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ かつ $(1, 1) \mapsto (2a - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2a)$ である。したがって P_n を移した点 P'_n は

$$P'_n = \left(u_n - \frac{1}{2}\right)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(2a - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2a)$$

である。整理すると $P'_n = (\sqrt{2}u_n + a - \sqrt{2}, -\sqrt{2}u_n + \frac{3\sqrt{2}}{2} - a)$ である。この 2 座標の和は $\frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

原点と P'_n を通る直線上の点は、ある倍率 λ を用いて $\lambda P'_n$ と表される。これが $x + y = 1$ 上にあるためには $\lambda \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ であるから $\lambda = \sqrt{2}$ である。したがって $P_{n+1} = \sqrt{2}P'_n$ であり、特に $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{2}a - 2$ を得る。

この漸化式の固定点を L とすると $L = 2L + \sqrt{2}a - 2$ だから $L = 2 - \sqrt{2}a$ である。よって $u_{n+1} - L = 2(u_n - L)$ である。 $u_1 = 1/2$ なので

$$u_n - L = 2^{n-1} \left(\frac{1}{2} - L\right) = 2^{n-1} \left(\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right)$$

である。

また $u_{n+1} - u_n = u_n - L$ だから

$$|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| = \sqrt{2}|u_{n+1} - u_n| = \sqrt{2}2^{n-1} \left|\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right|$$

である。よって

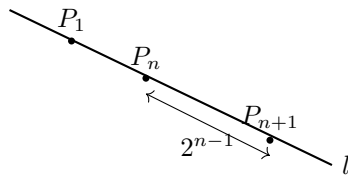
$$|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| = \sqrt{2}2^{n-1} \left|\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right|$$

である。

(2) $|\overrightarrow{P_1 P_8}| = \sqrt{2}|u_8 - u_1|$ である。上で得た式から $u_8 - u_1 = (u_8 - L) - (u_1 - L) = (2^7 - 1) \left(\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right)$ なので

$|\overrightarrow{P_1 P_8}| = 127\sqrt{2} \left|\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right|$ である。これが $\frac{635}{\sqrt{2}}$ に等しいから $127\sqrt{2} \left|\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right| = \frac{635}{\sqrt{2}}$ である。したがって $\left|\sqrt{2}a - \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$ である。

よって $\sqrt{2}a - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ または $\sqrt{2}a - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ である。これを解いて $a = 2\sqrt{2}$, $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。



▶ 解法 2：ずれの量を直接 2 倍する

【方針】

P_n の第 1 座標を u_n とする。変換と原点からの射影を 1 回まとめて漸化式を作り、その固定点からのずれが毎回 2 倍になることを利用する。 P_1P_8 はずれの差として一度に計算する。

【解答】

(1)

$$P_n = (u_n, 1 - u_n)$$

とおく。2 つの与えられた方向へ分解して $f(P_n)$ を求め、原点から $x + y = 1$ へ戻すと

$$u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{2}a - 2.$$

この変換の固定点は

$$L = 2 - \sqrt{2}a$$

であるから

$$u_{n+1} - L = 2(u_n - L).$$

$u_1 = 1/2$ より

$$u_n - L = 2^{n-1} \left(\sqrt{2}a - \frac{3}{2} \right).$$

また $u_{n+1} - u_n = u_n - L$ なので

$$|\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| = \sqrt{2} 2^{n-1} \left| \sqrt{2}a - \frac{3}{2} \right|.$$

(2)

$$u_8 - u_1 = (2^7 - 1) \left(\sqrt{2}a - \frac{3}{2} \right)$$

である。したがって条件は

$$127\sqrt{2} \left| \sqrt{2}a - \frac{3}{2} \right| = \frac{635}{\sqrt{2}}.$$

よって

$$\left| \sqrt{2}a - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

となり、

$$a = 2\sqrt{2}$$

または

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【総評】 前期文系第 4 問の構造を含みつつ、係数 a によって漸化式が平行移動する問題である。目安時間は 25 分。点を $P_n = (u_n, 1 - u_n)$ と置き、 $(1, -1), (1, 1)$ の組み合わせで表すと計算が短い。漸化式 $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{2}a - 2$ は固定点 $2 - \sqrt{2}a$ からのずれで解くと、距離公式まで一気に整理できる。2 解法の結論を相互照合し、定義域、符号、端点、等号成立条件を確認した。問題に即した高校数学の範囲だけで構成した。図は立式の対応を示す解説図であり、結論には依存しない。