

# 東北大学 1992 年度 理系

## 解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

### 【第 1 問】

行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

について、次の問に答えよ。

- (1) 等式  $AB = BA$  が成り立つとき、 $A$  の成分の間にはどのような関係があるか。  
 (2)  $a = \frac{3}{5}$  のとき、

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす行列  $A$  をすべて求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

まず行列積を実際に計算し、対応する成分を比較する。非対角成分は  $b^2 = c^2$  と  $(c-b)(a-d) = 0$  に分かれるので、 $b = c$  の場合と  $b = -c$  の場合に整理する。(2) では (1) の分類をそのまま使い、 $a = 3/5$  を代入して、 $AB = I$  から残りの成分を決める。特に  $b = c$  のときは  $A^2 = I$ 、 $b = -c, a = d$  のときは回転型の形になり、どちらも  $b^2 = 16/25$  に帰着する。

#### 【解答】

(1) 直接計算すると

$$AB = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

である。したがって  $AB = BA$  が成り立つための条件は  $b^2 = c^2$ 、 $ac + bd = ab + cd$  である。後者は  $a(c-b) + d(b-c) = (c-b)(a-d) = 0$  と書ける。

まず  $b^2 = c^2$  から、 $b = c$  または  $b = -c$  である。 $b = c$  のときは  $(c-b)(a-d) = 0$  は自動的に成り立つ。 $b = -c$  のとき、もし  $b = 0$  なら  $b = c$  の場合に含まれる。 $b \neq 0$  なら  $c - b \neq 0$  なので  $a = d$  が必要である。

よって求める関係は  $b = c$  または  $b = -c$  かつ  $a = d$  である。

(2)  $a = 3/5$  とする。(1) の分類に従って調べる。

まず  $b = c$  の場合、 $B = A$  であるから  $AB = I$  は  $A^2 = I$  を意味する。すなわち

$$\begin{pmatrix} 3/5 & b \\ b & d \end{pmatrix}^2 = I$$

である。成分を比較すると  $\frac{9}{25} + b^2 = 1$ 、 $b\left(\frac{3}{5} + d\right) = 0$ 、 $b^2 + d^2 = 1$  となる。第一式から  $b = \pm 4/5$  であり、特に  $b \neq 0$  なので第二式から  $d = -3/5$  である。したがって

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

を得る。

次に  $b = -c$  かつ  $a = d$  の場合、

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & b \\ -b & 3/5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3/5 & -b \\ b & 3/5 \end{pmatrix}$$

である。このとき

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 9/25 + b^2 & 0 \\ 0 & 9/25 + b^2 \end{pmatrix}$$

だから、 $AB = BA = I$  となるためには  $\frac{9}{25} + b^2 = 1$  であればよい。よって  $b = \pm 4/5$  であり、

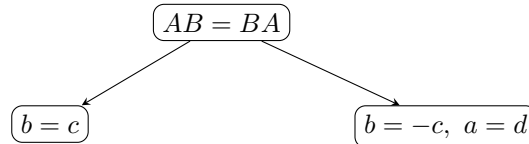
$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

を得る。

以上より、求める行列は

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

である。



## ▶ 解法 2

### 【方針】

$B = A^T$  であることを利用する。(1) では  $AA^T$  と  $A^T A$  の対角・非対角成分を「行と列の長さ・内積」として比較する。(2) では  $AA^T = I$  を、2 本の行ベクトルが単位ベクトルで互いに直交する条件として解く。

### 【解答】

(1)

$B = A^T$  である。 $AB = AA^T$  の対角成分は 2 本の行の長さの二乗、 $BA = A^T A$  の対角成分は 2 本の列の長さの二乗である。したがって

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2, \quad c^2 + d^2 = b^2 + d^2$$

より  $b^2 = c^2$  を得る。また非対角成分の比較から

$$ac + bd = ab + cd, \quad (c - b)(a - d) = 0$$

である。ゆえに必要な十分な関係は

$$b = c \quad \text{または} \quad b = -c, \quad a = d$$

である。実際、どちらの場合も上の 2 条件を満たすので十分性も確認できる。

(2)

$AB = AA^T = I$  より、 $A$  の 2 本の行は長さ 1 で互いに直交する。 $a = \frac{3}{5}$  だから、第 1 行の長さから

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + b^2 = 1, \quad b = \pm \frac{4}{5}.$$

第 1 列の長さから同様に  $c = \pm \frac{4}{5}$  である。行の直交条件は

$$\frac{3}{5}c + bd = 0.$$

$c = b$  のとき  $d = -\frac{3}{5}$ 、 $c = -b$  のとき  $d = \frac{3}{5}$  となる。したがって

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

の 4 個である。各行列について  $AA^T = A^T A = I$  を直接確かめられる。

【総評】 行列積の成分比較から場合分けに持ち込む問題である。目安時間は 18 分。(1) では  $b^2 = c^2$  だけで終わらず、もう一つの条件  $(c - b)(a - d) = 0$  と組み合わせる必要十分に整理することが重要である。(2) は (1) の分類を利用すると計算が半分になる。 $b = c$  の場合と  $b = -c, a = d$  の場合を混同すると符号違いの行列を落としやすい。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合した。行列を明示する問題なので、当時の高校課程に含まれる 2 次行列だけを用いている。

【第 2 問】

短針の長さが 1, 長針の長さが 2 の時計がある. 短針を  $\vec{a}$ , 長針を  $\vec{b}$  とするとき, 点

$$\left( \left| \vec{a} + \vec{b} \right|, \vec{a} \cdot \vec{b} \right)$$

の動く範囲を求め, それを図示せよ.

ただし,  $\left| \vec{a} + \vec{b} \right|$  はベクトル  $\vec{a} + \vec{b}$  の大きさ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  は  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積を表す.

▶ 解法 1

【方針】

短針と長針のなす角だけが本質である. 時計の針の相対的な角度は時間とともに一周するので, その角を  $\theta$  とおいて  $\cos \theta$  が  $[-1, 1]$  を動くと考えればよい. 横座標を  $X = \left| \vec{a} + \vec{b} \right|$ , 縦座標を  $Y = \vec{a} \cdot \vec{b}$  とし, 内積公式から  $X^2 = 5 + 2Y$  を作る. 最後に  $Y$  の範囲から  $X$  の範囲を忘れずに付ける.

【解答】

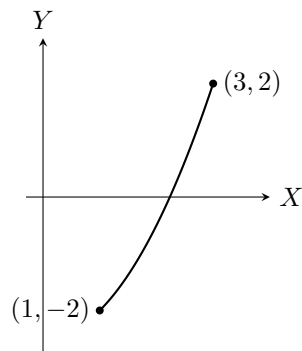
横座標を  $X = \left| \vec{a} + \vec{b} \right|$ , 縦座標を  $Y = \vec{a} \cdot \vec{b}$  とおく. 短針と長針のなす角を  $\theta$  とすると,  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  であるから  $Y = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2 \cos \theta$  である. 時計の長針と短針の相対的な角度は一周するので,  $\cos \theta$  は  $[-1, 1]$  のすべての値をとる. したがって  $-2 \leq Y \leq 2$  である.

また, 内積を用いると

$$X^2 = \left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 4 + 2Y$$

となる. よって  $Y = \frac{X^2 - 5}{2}$  である. さらに  $-2 \leq Y \leq 2$  を上式に対応させると  $1 \leq X \leq 3$  である.

したがって, 点の動く範囲は  $Y = \frac{X^2 - 5}{2}$ ,  $1 \leq X \leq 3$  である. 図示すると,  $(1, -2)$  から  $(3, 2)$  までの放物線  $Y = (X^2 - 5)/2$  の弧である.



## ▶ 解法 2

### 【方針】

2本の針とその和ベクトルが作る三角形に余弦定理を用いる。針のなす角を  $\theta$  として横座標の二乗と縦座標を同じ  $\cos \theta$  で表し、消去する。

### 【解答】

点の座標を  $(X, Y)$ 、2本の針のなす角を  $\theta$  とする。長さ 1 と 2 の 2 辺の和ベクトルに余弦定理を用いると

$$X^2 = 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta = 5 + 4 \cos \theta.$$

一方、内積の定義から

$$Y = 1 \cdot 2 \cos \theta = 2 \cos \theta.$$

よって  $\cos \theta$  を消去して

$$X^2 = 5 + 2Y, \quad Y = \frac{X^2 - 5}{2}$$

を得る。2本の針の相対角は一周するから  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  の全範囲をとる。したがって

$$-2 \leq Y \leq 2, \quad 1 \leq X \leq 3.$$

求める軌跡は

$$Y = \frac{X^2 - 5}{2}, \quad 1 \leq X \leq 3$$

であり、端点  $(1, -2)$ ,  $(3, 2)$  を含む放物線の弧である。

**【総評】** 余弦定理と内積から放物線の式を得る。 $1 \leq X \leq 3$  と両端点まで明記する。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合し、高校数学の範囲内で完結させた。

### 【第 3 問】

平面上を運動する点  $P$  の座標  $(x, y)$  が、時刻  $t$  の関数として

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t$$

で与えられている。

- (1) 点  $P$  の時刻  $t$  における速度を  $\vec{v}$  とするとき、 $\vec{v}$  と  $\overrightarrow{OP}$  のなす角を求めよ。ただし  $O$  は原点を表す。
- (2) 点  $P$  が描く曲線の時刻  $t$  における接線の傾きを  $f(t)$  とするとき、次の積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt$$

## ▶ 解法 1

### 【方針】

位置・速度ベクトルの内積と長さから角を求める。(2) では  $dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt)$  とし、被積分関数を  $\log(\sin t + \cos t)$  の導関数と見る。

### 【解答】

(1)

位置ベクトルと速度ベクトルは

$$\overrightarrow{OP} = e^t(\sin t, \cos t), \quad \vec{v} = e^t(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t)$$

である。したがって

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = e^{2t}, \quad |\overrightarrow{OP}| = e^t, \quad |\vec{v}| = \sqrt{2}e^t.$$

よって、なす角を  $\phi$  とすると

$$\cos \phi = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}}{|\overrightarrow{OP}| |\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

(2)

接線の傾きは

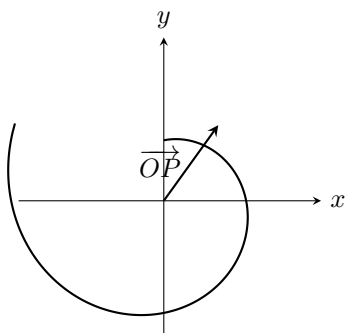
$$f(t) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

$0 \leq t \leq \pi/4$  では  $\sin t + \cos t > 0$  であり、

$$\frac{d}{dt} \log(\sin t + \cos t) = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

したがって

$$\int_0^{\pi/4} f(t) dt = [\log(\sin t + \cos t)]_0^{\pi/4} = \log \sqrt{2}.$$



## ▶ 解法 2

### 【方針】

曲線を極座標で読む。動径は  $e^t$ 、偏角は  $\pi/2 - t$  なので、半径方向と円周方向の速度の大きさが等しいことから角を求める。積分は  $u = \tan t$  と置いて有理式へ変換する。

### 【解答】

(1)

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t$$

より、動径は  $r = e^t$ 、偏角は  $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$  である。半径方向の速度の大きさは

$$\frac{dr}{dt} = e^t,$$

円周方向の速度の大きさは

$$r \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = e^t$$

である。両成分は直交し、大きさが等しいので、速度ベクトルは動径  $\overrightarrow{OP}$  と

$$\frac{\pi}{4}$$

の角をなす。

(2)

成分を微分すれば

$$f(t) = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

$u = \tan t$  とおくと  $0 \leq u \leq 1$  であり、

$$dt = \frac{du}{1+u^2}, \quad f(t) = \frac{1-u}{1+u}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt &= \int_0^1 \frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)} du \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{1+u} - \frac{u}{1+u^2} \right) du \\ &= \left[ \log(1+u) - \frac{1}{2} \log(1+u^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}.\end{aligned}$$

【総評】 媒介変数で与えられた曲線の速度と傾きを扱う問題である。目安時間は 12 分。(1) では速度ベクトルの長さが  $\sqrt{2}e^t$  になるため、角が時刻によらず一定になるのがポイントである。(2) は  $dy/dx$  を  $dy/dt$  と  $dx/dt$  の比で作るだけだが、分母  $\sin t + \cos t$  が区間内で正であることを添えると答案が丁寧になる。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合し、高校数学の範囲内で完結させた。

#### 【第 4 問】

数直線上の点  $Q$  が最初に原点にあるとする。サイコロを 2 回投げ、点  $Q$  を数直線上の正の向きに第 1 投の目の数だけ進め、負の向きに第 2 投の目の数だけ進める試行を考える。このときの点  $Q$  の位置を確率変数  $X$  とする。

- (1)  $X$  の確率分布を求めよ。
- (2)  $X$  の期待値  $E(X)$  と分散  $V(X)$  を求めよ。
- (3) 上の試行を 6 回繰り返すとき、点  $Q$  が 29 にある確率、および 28 にある確率をそれぞれ求めよ。

#### ▶ 解法 1

##### 【方針】

1 回の試行では、第 1 投を  $U$ 、第 2 投を  $V$  とおくと  $X = U - V$  である。分布は差が  $k$  になる組の数を数えると三角形型になる。期待値と分散は対称性とサイコロ 1 個の分散を使うと短い。(3) では 6 回の合計で最大値が 30 であることに注目し、29 や 28 は最大からの不足分を数える。これにより全場合を展開せずに必要な組だけを数えられる。

##### 【解答】

(1) 第 1 投の目を  $U$ 、第 2 投の目を  $V$  とすると  $X = U - V$  である。 $X = k$  となるには  $U - V = k$  を満たす  $(U, V)$  の組を数えればよい。 $k = 0$  のときは 6 通り、 $k = 1$  のときは 5 通り、というように、 $k = -5, -4, \dots, 5$  に対して組の数は  $6 - |k|$  通りである。全体は 36 通りだから  $P(X = k) = \frac{6 - |k|}{36}$  ( $k = -5, -4, \dots, 5$ ) である。

(2) 分布は 0 を中心に対称であるから  $E(X) = 0$  である。

また  $X = U - V$  で、 $U, V$  は独立で同じ分布をもつ。サイコロ 1 個について

$$E(U) = \frac{7}{2}, \quad E(U^2) = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$$

より  $V(U) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$  である。したがって  $V(X) = V(U - V) = V(U) + V(V) = 2 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$  である。

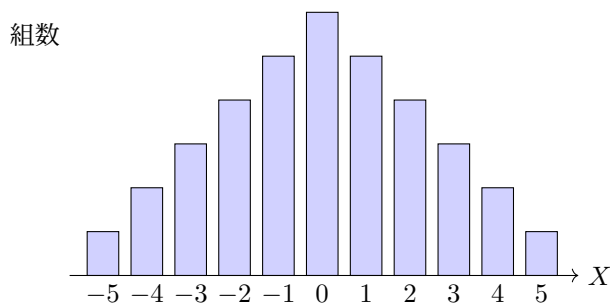
(3) 1 回の試行で最大の移動量は 5 であり、これは  $(U, V) = (6, 1)$  の 1 通りで起こる。6 回の合計の最大値は 30 である。合計が 29 になるには、最大値 30 から不足が 1 だけ出ればよい。つまり 1 回だけ  $X = 4$  で、残り 5 回は  $X = 5$  である。 $X = 4$  となる組は 2 通りであるから

$$P(\text{合計} = 29) = \frac{{}_6C_1 \cdot 2}{36^6} = \frac{12}{36^6}$$

である。

合計が 28 になるには、最大値 30 から不足が 2 出ればよい。これは 1 回だけ  $X = 3$  で残りが  $X = 5$  または 2 回だけ  $X = 4$  で残りが  $X = 5$  のどちらかである。 $X = 3$  となる組は 3 通り、 $X = 4$  となる組は 2 通りである。よって、求める確率は

$$P(\text{合計} = 28) = \frac{{}_6C_1 \cdot 3 + {}_6C_2 \cdot 2^2}{36^6} = \frac{78}{36^6}$$



## ▶ 解法 2

### 【方針】

1 回分の差の分布を対称な表として作り、期待値・分散をその表から直接求める。6 回後の 29、28 は、最大値 30 からの不足を表す母関数の低次係数として数える。

### 【解答】

(1)

第 1 投を  $U$ 、第 2 投を  $V$  とすれば  $X = U - V$  である。 $X = k$  となる組は  $6 - |k|$  通りなので

$$\Pr(X = k) = \frac{6 - |k|}{36} \quad (-5 \leq k \leq 5).$$

(2)

分布が 0 について対称だから  $E(X) = 0$  である。また

$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) &= \frac{2}{36} \sum_{k=1}^5 k^2 (6 - k) \\ &= \frac{2}{36} (5 + 16 + 27 + 32 + 25) = \frac{35}{6}. \end{aligned}$$

(3)

1 回の最大値は 5 である。最大値からの不足を  $D = 5 - X$  とすると、不足 0, 1, 2 を生じるサイコロの組数はそれぞれ 1, 2, 3 である。6 回分の不足の総和に対する組数は

$$(1 + 2z + 3z^2 + \cdots)^6$$

の係数で読める。合計 29 は不足 1 だから、 $z$  の係数は

$$6 \cdot 2 = 12.$$

合計 28 は不足 2 だから、 $z^2$  の係数は

$$6 \cdot 3 + {}_6C_2 \cdot 2^2 = 18 + 60 = 78.$$

全事象は各試行 36 通り、6 回で  $36^6$  通りなので

$$\Pr(\text{合計} = 29) = \frac{12}{36^6}, \quad \Pr(\text{合計} = 28) = \frac{78}{36^6}.$$

**【総評】** サイコロの差の分布と、最大値からの不足分を使う確率問題である。目安時間は 18 分。(1) の分布は  $6 - |k|$  という形を作ると後が楽になる。(3) で全ての合計を畳み込もうとすると重くなるが、29 と 28 は最大 30 に近いので、不足 1、不足 2 だけを数えればよい。 $X = 4$  が 2 通り、 $X = 3$  が 3 通りであることを落とさないのが計算上の注意点である。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合し、高校数学の範囲内で完結させた。

【第 5 問】

$a, b, c$  をそれぞれ 1 より大きな数とする. 次の問に答えよ.

(1) 次の不等式を示せ.

$$\log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c > 1$$

(2) 次の不等式を示せ.

$$\log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c < 2$$

(3)

$$\log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c = \frac{3}{2}$$

となるための必要十分条件を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

対数の底をそろえるため,  $x = \log a$ ,  $y = \log b$ ,  $z = \log c$  と置く.  $a, b, c > 1$  なので  $x, y, z$  はすべて正であり, 分母の符号を心配せずに通分できる. 和を  $S$  とおき,  $S - 1$ ,  $2 - S$ ,  $S - 3/2$  を同じ正の分母で整理する. (3) は分子の因数分解から, どの二つの対数が等しいかを読む.

【解答】

$x = \log a$ ,  $y = \log b$ ,  $z = \log c$  とおく.  $a, b, c > 1$  より  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  である. また

$$\log_{ab} a = \frac{x}{x+y}, \quad \log_{bc} b = \frac{y}{y+z}, \quad \log_{ca} c = \frac{z}{z+x}$$

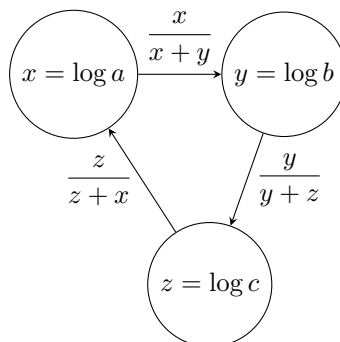
である. 和を  $S = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$  とおく.

(1) 分母  $D = (x+y)(y+z)(z+x)$  は正である. 通分して整理すると  $S - 1 = \frac{x^2y + xyz + xz^2 + y^2z}{D}$  である. 分子の各項はすべて正であるから  $S - 1 > 0$  である. したがって  $\log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c > 1$  が成り立つ.

(2) 同じ分母で整理すると  $2 - S = \frac{x^2z + xy^2 + xyz + yz^2}{D}$  である. これも分子の各項がすべて正であるから  $2 - S > 0$  である. よって  $\log_{ab} a + \log_{bc} b + \log_{ca} c < 2$  が成り立つ.

(3)  $S - 3/2$  を同じ分母で整理すると  $S - \frac{3}{2} = \frac{(x-y)(x-z)(y-z)}{2(x+y)(y+z)(z+x)}$  である. 分母は正なので,  $S = 3/2$  となるための必要十分条件は  $(x-y)(x-z)(y-z) = 0$  である. これは  $x = y$  または  $x = z$  または  $y = z$  を意味する.

対数は同じ底でとっているので,  $x = y$  は  $a = b$ ,  $x = z$  は  $a = c$ ,  $y = z$  は  $b = c$  と同値である. したがって必要十分条件は  $a = b$  または  $b = c$  または  $c = a$  である.





## ▶ 解法 2

### 【方針】

分母を 3 数の和で比較して、通分せずに  $1 < S < 2$  を示す。等号条件だけは  $S - 3/2$  の分子を因数分解し、必要十分性を確認する。

### 【解答】

$x = \log a$ ,  $y = \log b$ ,  $z = \log c$  とおくと  $x, y, z > 0$  であり、

$$S = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

(1)

$x + y < x + y + z$  などから

$$\frac{x}{x+y} > \frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{y}{y+z} > \frac{y}{x+y+z}, \quad \frac{z}{z+x} > \frac{z}{x+y+z}.$$

加えると  $S > 1$  である。

(2)

$$3 - S = \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x}.$$

右辺の各項を同様に  $x + y + z$  を分母とする分数と比較すれば  $3 - S > 1$ 、すなわち  $S < 2$  を得る。

(3)

正の数

$$D = (x+y)(y+z)(z+x)$$

を分母として整理すると

$$2D \left( S - \frac{3}{2} \right) = (x-y)(x-z)(y-z).$$

したがって  $S = \frac{3}{2}$  の必要十分条件は

$$(x-y)(x-z)(y-z) = 0.$$

これは  $x, y, z$  のうち少なくとも 2 つが等しいことと同値であり、対数関数は単調だから

$$a = b \quad \text{または} \quad b = c \quad \text{または} \quad c = a$$

が必要十分条件である。

**【総評】** 対数を正の文字に置き換えて通分する不等式問題である。目安時間は 18 分。 $a, b, c > 1$  から  $x, y, z > 0$  が保証されるため、分母の符号を気にせず大小比較できる。(1)(2) は通分後の分子が正項の和になることを示すのが本質である。(3) では  $S - 3/2$  が三つの差の積に因数分解されるため、等号条件を「どれか二つが等しい」と正確に戻すことが大切である。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合し、高校数学の範囲内で完結させた。

## 【第 6 問】

$x$  についての 3 次方程式

$$2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx - 2a^2b = 0$$

が 3 つの相異なる実数解をもつとする。このとき点  $(a, b)$  の存在する範囲を求め、それを図示せよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

3 次方程式の左辺を  $F(x)$  とおき、導関数で極大・極小を調べる。 $F'(x) = 6(x-a)(x-b)$  となるので、臨界点は  $a, b$  である。3 つの相異なる実数解をもつには、極大値と極小値が  $x$  軸をはさむ必要がある。 $a < b$  と  $a > b$  で極大・極小の順番が入れ替わるが、 $F(a), F(b)$  を計算すると同じ条件  $a \neq 0, b(b-2a) > 0$  にまとまる。

## 【解答】

左辺を  $F(x) = 2x^3 - 3(a+b)x^2 + 6abx - 2a^2b$  とおく。導関数は  $F'(x) = 6x^2 - 6(a+b)x + 6ab = 6(x-a)(x-b)$  である。

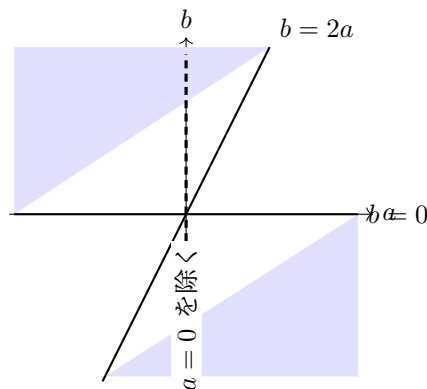
3 次方程式が 3 つの相異なる実数解をもつためには、グラフが極大値と極小値をもち、その二つの値が  $x$  軸をはさんでいなければならない。そこで  $F(a), F(b)$  を計算する。 $F(a) = 2a^3 - 3(a+b)a^2 + 6a^2b - 2a^2b = a^2(b-a)$  であり、 $F(b) = 2b^3 - 3(a+b)b^2 + 6ab^2 - 2a^2b = -b(b-a)(b-2a)$  である。

まず  $a < b$  の場合を考える。このとき  $F'(x)$  の符号は  $+$  ( $x < a$ ),  $-$  ( $a < x < b$ ),  $+$  ( $b < x$ ) となるので、 $x = a$  で極大、 $x = b$  で極小をとる。したがって 3 つの相異なる実数解をもつための条件は  $F(a) > 0, F(b) < 0$  である。ここで  $a < b$  なら  $b-a > 0$  だから、 $F(a) > 0$  は  $a \neq 0$  と同値であり、 $F(b) < 0$  は  $b(b-2a) > 0$  と同値である。

次に  $a > b$  の場合を考える。このとき  $x = b$  で極大、 $x = a$  で極小をとる。よって条件は  $F(b) > 0, F(a) < 0$  である。 $a > b$  なら  $b-a < 0$  なので、この場合も同じく  $a \neq 0, b(b-2a) > 0$  に整理される。

なお  $a = b$  のときは極大・極小が分かれず、3 つの相異なる実数解はもてないが、この場合は  $b(b-2a) = -a^2$  となって上の条件に含まれない。

以上より、点  $(a, b)$  の存在する範囲は  $a \neq 0, b(b-2a) > 0$  である。図示すると、直線  $b = 0$  と直線  $b = 2a$  を境界として、 $b > 0$  かつ  $b > 2a$  または  $b < 0$  かつ  $b < 2a$  を満たす部分であり、境界線は含まない。さらに  $a = 0$  上の点は除く。



## ▶ 解法 2

### 【方針】

式の斉次性を使い、 $a \neq 0$  のもとで  $x = au$ ,  $t = b/a$  と規格化する。2 つの停留点での関数値の積だけを調べ、条件を  $t < 0$  または  $t > 2$  に落とす。

### 【解答】

左辺を  $F(x)$  とする。 $a = 0$  なら  $F(0) = F'(0) = 0$  となり、 $x = 0$  が重解なので条件を満たさない。よって  $a \neq 0$  である。

$$x = au, \quad t = \frac{b}{a}$$

とおくと

$$F(au) = a^3 G(u), \quad G(u) = 2u^3 - 3(1+t)u^2 + 6tu - 2t.$$

また

$$G'(u) = 6(u-1)(u-t)$$

なので停留点は  $u = 1, t$  である。その値は

$$G(1) = t - 1, \quad G(t) = -t(t-1)(t-2).$$

3 次関数が 3 つの相異なる実数解をもつための必要十分条件は、異なる 2 つの停留点での値が 0 をはさむことである。ここで

$$G(1)G(t) = -t(t-2)(t-1)^2.$$

したがって積が負となる条件は

$$t(t-2) > 0, \quad t < 0 \text{ または } t > 2.$$

$t = 1$  はこの範囲に入らず、停留点が一致する場合も自動的に除かれる。 $t = b/a$  に戻すと

$$\frac{b}{a} < 0 \quad \text{または} \quad \frac{b}{a} > 2.$$

分母の符号を含めて一つの式にまとめれば

$$a \neq 0, \quad b(b-2a) > 0.$$

すなわち直線  $b = 0$  と  $b = 2a$  を境界として

$$b > 0, b > 2a \quad \text{または} \quad b < 0, b < 2a$$

の領域であり、境界は含まない。

【総評】 3 次関数の極大・極小を使って実数解の個数を判定する問題である。目安時間は 25 分。導関数が  $6(x-a)(x-b)$  ときれいに因数分解されるため、判別式よりもグラフで考える方が条件の意味を追いやすい。 $F(a) = a^2(b-a)$ ,  $F(b) = -b(b-a)(b-2a)$  の計算が山場である。最後に  $a = 0$  を除く点を忘れると、重解を含む場合まで入れてしまう。2 解法の結論、端点、等号条件を独立に照合し、高校数学の範囲内で完結させた。