

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1993 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$), $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = A^n - E$ (n は自然数) について, 次の問に答えよ.

(1) N^2 , $(E + N)(E - N)$ を求めよ.

(2) $E - N$ が逆行列をもつことを示し, $(E - N)^{-1}$ を求めよ.

(3) 等式 $X^2 = N$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ は存在しないことを証明せよ.

第 2 問

曲線 $C: y = \log(x+1) + 1$ を考える．ただし，対数は自然対数とする． C 上の点 P から x 軸に下ろした垂線， P における C の法線，および x 軸で囲まれる三角形の面積を S とする． P の x 座標が負でないとき， S の最大値を求めよ．

第 3 問

xy 平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ を頂点とする三角形を, 直線

$$l: y = (\tan \theta)x \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

を軸として 1 回転してできる回転体の体積を V とおくとき, 次の問に答えよ.

- (1) l と辺 AB の交点を C とするとき, 線分 OC の長さを θ の関数として表せ. また, OC の長さの最大値および最小値を求めよ.
- (2) V を θ の関数として表せ.
- (3) V の最大値および最小値を求めよ.

第 4 問

r, n を自然数, k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とする. 集合 $T = \{i | i \text{ は整数}, 1 \leq i \leq r+n\}$ から $r+k$ 個の数を取り出すとき, その中に集合 $S = \{i | i \text{ は整数}, 1 \leq i \leq r\}$ の元がすべて含まれる確率を a_n とおく.

(1) a_n を r, n, k の式として表せ.

(2) $r \geq 2$ のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を求めよ.

第 5 問

原点 $(0, 0)$ を O とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする. 3 点 $P_1(1, 0)$, $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_3(0, 1)$ の f による像をそれぞれ P_1' , P_2' , P_3' とおく.

$\overrightarrow{OP_1'} \cdot \overrightarrow{OP_1'} = 1$, $\overrightarrow{OP_2'} \cdot \overrightarrow{OP_2'} = 3$, $\overrightarrow{OP_3'} \cdot \overrightarrow{OP_3'} = 3$ であるとき, 次の問に答えよ. ただし, $\overrightarrow{OP_i'} \cdot \overrightarrow{OP_i}$ ($i = 1, 2, 3$) は $\overrightarrow{OP_i'}$ と $\overrightarrow{OP_i}$ の内積を表す.

(1) a , b , c を求めよ.

(2) 点 $P(\cos t, \sin t)$ の f による像を P' とする. t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で変化するとき, $\overrightarrow{OP'}$ と $\overrightarrow{OP}$ の内積 $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP}$ の最大値と最小値, およびそれらの値を与える t の値を求めよ.

第 6 問

方程式 $x \cos x = 2$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における解を a とする.

(1) 2つの不等式 $\frac{3}{2}\pi < a < 2\pi$, $\sqrt{a^2 - 4} \geq \frac{4}{5}a$ が成り立つことを示せ.

(2) 2つの曲線 $y = \sin x$, $y = \frac{x}{4} \sin 2x$ で囲まれる図形で, $0 \leq x \leq \pi$ に対応する部分の面積を S , $\pi \leq x \leq a$ に対応する部分の面積を T とするとき, $S > T$ であることを示せ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)