

東北大学 1993 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a \neq 0$), $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = A^n - E$ (n は自然数) について, 次の問に答えよ.

- (1) N^2 , $(E + N)(E - N)$ を求めよ.
- (2) $E - N$ が逆行列をもつことを示し, $(E - N)^{-1}$ を求めよ.
- (3) 等式 $X^2 = N$ を満たす行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ は存在しないことを証明せよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず A^n を帰納法または上三角行列の形から求め, N が右上成分だけをもつ行列であることを確認する. このとき $N^2 = O$ なので, $(E + N)(E - N) = E$ がすぐ従い, 逆行列も決まる. 最後は $X^2 = N$ を成分比較し, 右上成分が $na \neq 0$ であることから $x + w \neq 0$ を引き出して矛盾させる.

【解答】

(1)

まず

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから, 自然数 n について

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である. これは $n = 1$ では明らかで, n から $n + 1$ への積でも右上成分が $na + a = (n + 1)a$ となるため, 帰納法で示せる. したがって

$$N = A^n - E = \begin{pmatrix} 0 & na \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. よって

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. また $(E + N)(E - N) = E - N^2 = E$ である.

(2)

(1) より $(E + N)(E - N) = E$ である. さらに行列の積の順序を逆にしても $(E - N)(E + N) = E - N^2 = E$ である. したがって $E - N$ は逆行列をもち,

$$(E - N)^{-1} = E + N = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である.

(3)

仮に

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

が $X^2 = N$ を満たすとする. 成分を計算すると

$$X^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x + w) \\ z(x + w) & zy + w^2 \end{pmatrix}$$

である. これが

$$N = \begin{pmatrix} 0 & na \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に等しいので $x^2 + yz = 0$, $y(x + w) = na$, $z(x + w) = 0$, $zy + w^2 = 0$ が成り立つ。

ここで $a \neq 0$ かつ n は自然数だから $na \neq 0$ である。したがって $y(x + w) = na \neq 0$ より $x + w \neq 0$ である。すると $z(x + w) = 0$ から $z = 0$ である。

これを $x^2 + yz = 0$, $zy + w^2 = 0$ に代入すると $x^2 = 0$, $w^2 = 0$ であるから $x = 0$, $w = 0$ となる。すると $x + w = 0$ となり、先ほど得た $x + w \neq 0$ に矛盾する。

よって $X^2 = N$ を満たす行列 X は存在しない。

$$\boxed{A = E + K} \xrightarrow{K^2 = O} \boxed{N = nK} \longrightarrow \boxed{N^2 = O}$$

$$(E - N)^{-1} = E + N$$

▶ 解法 2

【方針】

$A = E + K$, $K^2 = O$ と見て $A^n = E + nK$ を出す。(3) では $X^2 = N$ なら $\det X = 0$ かつ $\text{tr}(X^2) = 0$ となることを使う。2 次正方行列の恒等式 $X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)E = O$ を成分で確認し、 $X^2 = O$ という矛盾を得る。

【解答】

(1)

$$K = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば $A = E + K$, $K^2 = O$ である。積を展開すると 2 次以上の K は消えるので

$$A^n = (E + K)^n = E + nK = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$N = nK = \begin{pmatrix} 0 & na \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = O.$$

よって

$$(E + N)(E - N) = E - N^2 = E.$$

(2)

同様に $(E - N)(E + N) = E$ も成り立つから

$$(E - N)^{-1} = E + N = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

仮に $X^2 = N$ とする。行列式を取ると

$$(\det X)^2 = \det N = 0$$

だから $\det X = 0$ である。また $\text{tr}(X^2) = \text{tr}(N) = 0$ である。

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

について

$$\text{tr}(X^2) = x^2 + w^2 + 2yz = (x + w)^2 - 2(xw - yz).$$

$\det X = xw - yz = 0$ なので $(x + w)^2 = 0$, すなわち $\text{tr } X = x + w = 0$ である。

2 次正方行列では成分計算により

$$X^2 - (\text{tr } X)X + (\det X)E = O$$

が成り立つ。ここへ $\text{tr} X = 0, \det X = 0$ を入れると $X^2 = O$ となる。しかし

$$N = \begin{pmatrix} 0 & na \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

である。実際 n は自然数、 $a \neq 0$ だから $na \neq 0$ である。矛盾より、そのような X は存在しない。

【総評】 上三角行列のべきと、成分比較による不可能性を組み合わせる問題。 A^n の右上成分が na になることを確認すれば、 $N^2 = O$ から (1)(2) は一気に進む。(3) では、 $na \neq 0$ を使って $x+w \neq 0$ を先に出すのが重要である。その後 $z=0$ 、 $x=w=0$ と進めると矛盾がはっきりする。 $a \neq 0$ の条件を使い忘れると最後の論理が弱くなる。成分比較と 2 次行列の恒等式という独立な矛盾の作り方を収録し、 $na \neq 0$ の使用箇所を明示した。

■ 【第 2 問】

曲線 $C: y = \log(x+1) + 1$ を考える。ただし、対数は自然対数とする。 C 上の点 P から x 軸に下ろした垂線、 P における C の法線、 および x 軸で囲まれる三角形の面積を S とする。 P の x 座標が負でないとき、 S の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 P の x 座標を u と置き、接線の傾きから法線の傾きを出す。法線が x 軸と交わる点を求めると、三角形の高さは $\log(u+1) + 1$ 、底辺はそれを $u+1$ で割った長さになる。そこで $v = u+1 \geq 1$ と置き、 $(\log v + 1)^2 / (2v)$ を微分して最大を調べる。

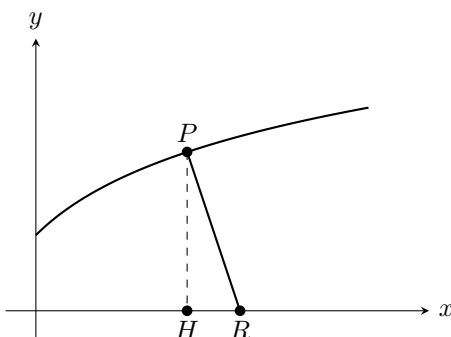
【解答】

点 P の x 座標を u とする。条件より $u \geq 0$ であり、 $P = (u, \log(u+1) + 1)$ である。ここで $L = \log(u+1) + 1$ とおくと、 $u \geq 0$ より $L \geq 1$ である。

曲線 C の接線の傾きは $y' = \frac{1}{x+1}$ であるから、点 P における接線の傾きは $1/(u+1)$ である。したがって法線の傾きは $-(u+1)$ である。法線の方程式は $y - L = -(u+1)(x - u)$ である。

この法線と x 軸との交点を R とする。 $y = 0$ を代入すると $-L = -(u+1)(x - u)$ だから $x - u = \frac{L}{u+1}$ である。よって、垂線の足は $(u, 0)$ であり、三角形の底辺の長さは $\frac{L}{u+1}$ 、高さは L である。したがって面積は $S = \frac{1}{2} \cdot L \cdot \frac{L}{u+1} = \frac{\{\log(u+1) + 1\}^2}{2(u+1)}$ である。

ここで $v = u+1$ とおくと、 $v \geq 1$ であり、 $S = \frac{(\log v + 1)^2}{2v}$ である。 $m = \log v + 1$ とおくと $\frac{dS}{dv} = \frac{m(2-m)}{2v^2}$ である。実際、 $m' = 1/v$ を用いて微分すればよい。 $v \geq 1$ では $m \geq 1$ である。したがって $1 \leq m < 2$ で S は増加し、 $m > 2$ で減少する。最大は $m = 2$ のとき、すなわち $\log v + 1 = 2$ より $v = e$ のときである。このとき $S_{\max} = \frac{2^2}{2e} = \frac{2}{e}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

面積を $v = u + 1$ 、さらに $r = \log v + 1$ で表すところまでは座標で求める。その後は微分せず、 $\log x \leq x - 1$ を $x = r/2$ に適用して $r^2 e^{-r} \leq 4e^{-2}$ を示し、等号条件から最大値を決める。

【解答】

点 P の x 座標を $u \geq 0$ とし

$$L = \log(u + 1) + 1$$

とおく。接線の傾きは $1/(u + 1)$ なので、法線の傾きは $-(u + 1)$ である。法線と x 軸の交点までの水平距離は $L/(u + 1)$ だから

$$S = \frac{L^2}{2(u + 1)}.$$

$$v = u + 1 \geq 1, \quad r = \log v + 1 \geq 1$$

とおくと $v = e^{r-1}$ であり

$$S = \frac{r^2}{2e^{r-1}} = \frac{e}{2} r^2 e^{-r}.$$

ここで任意の正数 x について

$$\log x \leq x - 1$$

である。 $x = r/2$ とすると

$$2 \log \frac{r}{2} \leq r - 2.$$

指数を取って整理すれば

$$\frac{r^2}{4} \leq e^{r-2}, \quad r^2 e^{-r} \leq 4e^{-2}.$$

したがって

$$S \leq \frac{e}{2} \cdot 4e^{-2} = \frac{2}{e}.$$

等号は $r/2 = 1$ 、すなわち $r = 2$ のときに限る。このとき

$$\log v + 1 = 2, \quad v = e, \quad u = e - 1.$$

よって面積の最大値は

$$\frac{2}{e}$$

である。

【総評】 法線と座標軸でできる三角形の面積を、1 変数関数に直す最大値問題。法線の傾きを $-(u + 1)$ とするところ、さらに x 軸との交点まで求めて底辺を $L/(u + 1)$ とするところが得点の中心である。 $v = u + 1$ と置くと定義域が $v \geq 1$ になり、 $\log v + 1 \geq 1$ も使える。微分後の符号変化を明記して、端ではなく $v = e$ で最大になることを確認したい。微分の増減表と対数不等式の等号条件がともに $u = e - 1$ を与えることを確認した。

【第 3 問】

xy 平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ を頂点とする三角形を, 直線

$$l: y = (\tan \theta)x \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

を軸として 1 回転してできる回転体の体積を V とおくと, 次の問に答えよ.

(1) l と辺 AB の交点を C とするとき, 線分 OC の長さを θ の関数として表せ. また, OC の長さの最大値および最小値を求めよ.

(2) V を θ の関数として表せ.

(3) V の最大値および最小値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

軸に沿う座標 u と, それに垂直な距離 v で三角形を見直す. $t = \tan \theta$ とおくと $OC = \sqrt{1+t^2}/(1+t)$ が得られる. 体積は, 軸に垂直な断面を円または輪として積分する. 軸が三角形の内部を通るため断面半径の最大側が途中で入れ替わるので, 分割点を明示して積分し, 最後に得られた式を微分して単調減少を確認する.

【解答】

(1) $t = \tan \theta$ とおく. 条件より $0 \leq t \leq 1$ である. 直線 l は $y = tx$, 辺 AB は $x + y = 1$ であるから, 交点 C は $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \frac{t}{1+t}$ である. したがって

$$OC = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t}\right)^2 + \left(\frac{t}{1+t}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$$

である.

また $t = \tan \theta$ なので $\sin \theta + \cos \theta = \frac{t+1}{\sqrt{1+t^2}}$ であり, $OC = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ とも書ける. $0 \leq \theta \leq \pi/4$ では $\sin \theta + \cos \theta$ は 1 から $\sqrt{2}$ まで増加する. よって

$$OC_{\max} = 1 \quad (\theta = 0), \quad OC_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4}\right)$$

である.

(2)

軸 l 方向の座標を u , それに垂直な符号付き距離を v とする. すなわち $u = x \cos \theta + y \sin \theta$, $v = -x \sin \theta + y \cos \theta$ とおく. $q = \sqrt{1+t^2}$ とすると $\cos \theta = \frac{1}{q}$, $\sin \theta = \frac{t}{q}$ である.

辺 OA 上では $v = -tu$, 辺 OB 上では $v = u/t$ である. また辺 AB 上では $v = \frac{q-u(1+t)}{1-t}$ である. ただし $0 < t < 1$ として計算し, 端点 $t = 0, 1$ は最後に連続性で扱う.

軸と辺 AB の交点は $u_C = \frac{q}{1+t}$ であり, 上側の半径と下側の半径が入れ替わる点は $u_0 = \frac{q}{1+2t-t^2}$ である. したがって断面積を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{t/q} \left(\frac{u}{t}\right)^2 du + \int_{t/q}^{u_0} \left(\frac{q-u(1+t)}{1-t}\right)^2 du \\ &\quad + \int_{u_0}^{u_C} (tu)^2 du + \int_{u_C}^{1/q} \left\{ (tu)^2 - \left(\frac{q-u(1+t)}{1-t}\right)^2 \right\} du \end{aligned}$$

である. 第 1 項から第 3 項は断面が円になる部分, 第 4 項は断面が輪になる部分である.

これを整理すると $V = \frac{\pi\sqrt{1+t^2}(-4t^3+t^2+4t+1)}{3(t+1)(t^2-2t-1)^2}$ である. したがって $V(0) = \frac{\pi}{3}$, $V(1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ であり, 上の式は端点でもこの値に連続的につながる.

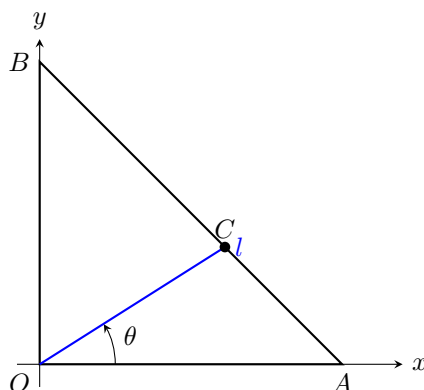
(3)

(2) の式を t で微分すると

$$\frac{1}{\pi} \frac{dV}{dt} = \frac{4t^7 + 6t^6 + 23t^5 + 9t^4 - 6t^3 + 4t^2 + 7t + 1}{3(t+1)^2\sqrt{1+t^2}(t^2-2t-1)^3}$$

である。 $0 \leq t \leq 1$ では $t^2 - 2t - 1 < 0$ である。また分子は $t^2(4 - 6t + 9t^2) + (23t^5 + 6t^6 + 4t^7) + 7t + 1$ と見れば正である。ここで $4 - 6t + 9t^2 > 0$ である。したがって $\frac{dV}{dt} < 0$ ($0 < t < 1$) であり、 V は単調に減少する。

よって最大値は $t = 0$ 、すなわち $\theta = 0$ のとき $V_{\max} = \frac{\pi}{3}$ であり、最小値は $t = 1$ 、すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $V_{\min} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

三角形を軸上の点 O, C と頂点 A, B をもつ 2 つの三角形へ分ける。各三角形の回転体は円錐をつないだ形になるので、軸に垂直な半径が切り替わる位置を求め、円錐・円錐台の体積公式で区間ごとの体積を加減する。

【解答】

(1)

辺 AB は $x + y = 1$ である。軸方向の単位ベクトルを

$$(\cos \theta, \sin \theta)$$

とすると、交点 C は

$$C = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} (\cos \theta, \sin \theta).$$

よって

$$OC = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \pi/4$ で分母は 1 から $\sqrt{2}$ まで増えるので

$$OC_{\max} = 1 \quad (\theta = 0), \quad OC_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\theta = \pi/4).$$

(2)

軸方向の座標を u 、軸に垂直な符号付き距離を v とする。また

$$t = \tan \theta, \quad q = \sqrt{1 + t^2}$$

とおく。三角形 OAB を OAC と OBC に分けて軸のまわりに回転すると、それぞれは円錐をつないだ立体になる。両者の同じ u における半径の大きい方を取れば、求める回転体の断面が得られる。

境界 OA, OB, AB の軸からの距離は、それぞれ区間に応じて

$$tu, \quad \frac{u}{t}, \quad \frac{q - u(1 + t)}{1 - t}$$

である。軸と AB の交点、および 2 つの半径が等しくなる点は

$$u_C = \frac{q}{1 + t}, \quad u_0 = \frac{q}{1 + 2t - t^2}$$

である。

高さ h 、両端の半径 r, R の円錐台の体積を

$$\Phi(h; r, R) = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2)$$

と書く。 $u = 0, t/q, u_0, u_C, 1/q$ で区切り、各区間を円錐または円錐台として加える。最後の区間だけは外側の円錐台から内側の円錐台を引く。この公式へ各端点の半径を代入して整理すると

$$V = \frac{\pi q(-4t^3 + t^2 + 4t + 1)}{3(t+1)(t^2 - 2t - 1)^2}.$$

この計算は、一次関数となる半径の両端値だけで実行できる。円錐台公式は

$$\int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}u \right)^2 du = \frac{h}{3}(r^2 + rR + R^2)$$

からも直ちに確認できる。

(3)

上式を微分すると

$$\frac{1}{\pi} \frac{dV}{dt} = \frac{4t^7 + 6t^6 + 23t^5 + 9t^4 - 6t^3 + 4t^2 + 7t + 1}{3(t+1)^2 \sqrt{1+t^2}(t^2 - 2t - 1)^3}.$$

$0 < t < 1$ で分母は負である。分子は

$$t^2(9t^2 - 6t + 4) + 23t^5 + 6t^6 + 4t^7 + 7t + 1 > 0$$

なので V は減少する。したがって

$$V_{\max} = V(0) = \frac{\pi}{3}, \quad V_{\min} = V(1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

それぞれ $\theta = 0, \pi/4$ のときである。

【総評】 軸が三角形の内部を通る回転体なので、単純な円すい 1 個では済まない上位問題。(1) は直線と辺の交点からすぐ求まるが、(2) では軸方向座標に直し、断面が円になる区間と輪になる区間を分ける必要がある。特に半径を決める上側・下側の境目 u_0 を入れないと体積式が合わない。(3) は微分式が重いので、分母の符号と分子の正性を分けて確認するのが現実的である。第 2 解法として立体を部分円すいに分解する方法も考えられるが、軸への射影位置が途中で入れ替わるため、断面積分の方が条件を追いやすい。軸直交断面の定積分と円錐・円錐台の分割という 2 経路で体積式を照合し、端点を含む単調性を確認した。

【第 4 問】

r, n を自然数、 k を $0 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。集合 $T = \{i | i \text{ は整数}, 1 \leq i \leq r+n\}$ から $r+k$ 個の数を取り出すとき、その中に集合 $S = \{i | i \text{ は整数}, 1 \leq i \leq r\}$ の元がすべて含まれる確率を a_n とおく。

(1) a_n を r, n, k の式として表せ。

(2) $r \geq 2$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

T は S の r 個と、それ以外の n 個に分かれる。 S の元をすべて含むには、残りの n 個からちょうど k 個を選べばよいので、まず組合せで a_n を出す。無限和では、 $n!/(n+r)!$ を隣り合う 2 項の差に分解して望ましい形の望遠和にする。 $k=0$ だけは和が $n=1$ から始まる点が違うため別に扱う。

【解答】

(1)

集合 T は、集合 S の r 個の元と、それ以外の n 個の元からなる。 T から $r+k$ 個を選ぶ方法は全部で ${}_{r+n}C_{r+k}$ 通りである。

その中に S の元がすべて含まれるためには、まず S の r 個はすべて選ばれ、残り k 個を $T \setminus S$ の n 個から選ばばよい。したがって条件を満たす選び方は ${}_nC_k$ 通りである。よって $a_n = \frac{{}_nC_k}{{}_{r+n}C_{r+k}}$ である。階乗で書けば

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(r+n)!}{(r+k)!(n-k)!}} \\ &= \frac{n!(r+k)!}{k!(r+n)!} \end{aligned}$$

である。

(2) $r \geq 2$ とする。まず

$$\frac{n!}{(n+r)!} = \frac{1}{r-1} \left\{ \frac{n!}{(n+r-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+r)!} \right\}$$

が成り立つ。実際、右辺の中括弧は

$$\frac{n!}{(n+r-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+r)!} = \frac{n!(n+r) - n!(n+1)}{(n+r)!} = \frac{(r-1)n!}{(n+r)!}$$

である。

まず $k \geq 1$ の場合を考える。 $n < k$ では ${}_nC_k = 0$ と見ればよいので、和は $n = k$ から始まる。したがって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{(r+k)!}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n+r)!} \\ &= \frac{(r+k)!}{k!} \cdot \frac{1}{r-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \frac{n!}{(n+r-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+r)!} \right\} \end{aligned}$$

である。これは望遠和になり、後ろの端は 0 に近づくので

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{(r+k)!}{k!} \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{k!}{(k+r-1)!} = \frac{r+k}{r-1}$$

である。

次に $k = 0$ の場合は $a_n = \frac{r!n!}{(r+n)!}$ であり、問題の和は $n = 1$ から始まる。よって

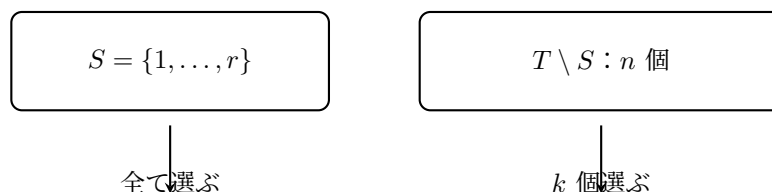
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= r! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+r)!} \\ &= r! \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1!}{r!} \\ &= \frac{1}{r-1} \end{aligned}$$

である。

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{r-1} & (k=0), \\ \frac{r+k}{r-1} & (k \geq 1) \end{cases}$$

である。



▶ 解法 2

【方針】

(1) の確率を階乗で表した後、 $\frac{n!}{(n+r)!}$ を

$$\int_0^1 x^n (1-x)^{r-1} dx$$

で表す。無限和と積分を交換して等比級数を先に足し、最後の有限積分を部分積分で評価する。

【解答】

(1)

S の r 個を必ず選び、残る n 個から k 個を選ぶので

$$a_n = \frac{{}_n C_k}{{}_{r+n} C_{r+k}} = \frac{n!(r+k)!}{k!(r+n)!}.$$

(2)

部分積分を $r-1$ 回行くと

$$\int_0^1 x^n (1-x)^{r-1} dx = \frac{n!(r-1)!}{(n+r)!}.$$

したがって

$$\frac{n!}{(n+r)!} = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 x^n (1-x)^{r-1} dx.$$

$k \geq 1$ のとき $a_n = 0$ ($n < k$) と考え、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{(r+k)!}{k!(r-1)!} \int_0^1 (1-x)^{r-1} \sum_{n=k}^{\infty} x^n dx \\ &= \frac{(r+k)!}{k!(r-1)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{r-2} dx. \end{aligned}$$

最後の積分を部分積分で評価すると

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{r-2} dx = \frac{k!(r-2)!}{(k+r-1)!}.$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{r+k}{r-1} \quad (k \geq 1).$$

$k=0$ では和が $n=1$ から始まるので

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{r!}{(r-1)!} \int_0^1 (1-x)^{r-1} \frac{x}{1-x} dx \\ &= r \int_0^1 x(1-x)^{r-2} dx = \frac{1}{r-1}. \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{1}{r-1} & (k=0), \\ \frac{r+k}{r-1} & (k \geq 1). \end{cases}$$

【総評】 確率を組合せで表した後、階乗型の無限和を望遠和にする問題。(1) では、 S の元をすべて含むという条件が「残り n 個から k 個を選ぶ」に変わることが中心である。(2) は $n!/(n+r)!$ の差分分解を自分で確認してから使うと安全である。 $k=0$ のときだけ和が $n=1$ から始まる影響で値が変わるため、 $k \geq 1$ と同じ式に流し込まないことが大切である。望遠和と定積分表示の 2 経路を用い、 $k=0$ だけ和の始点が異なることを双方で分離した。

【第 5 問】

原点 $(0, 0)$ を O とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を f とする. 3 点 $P_1(1, 0)$, $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_3(0, 1)$ の f による像をそれぞれ P_1' , P_2' , P_3' とおく.
 $\overrightarrow{OP_1'} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 1$, $\overrightarrow{OP_2'} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 3$, $\overrightarrow{OP_3'} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 3$ であるとき、次の間に答えよ. ただし、 $\overrightarrow{OP_i'} \cdot \overrightarrow{OP_i}$ ($i = 1, 2, 3$) は $\overrightarrow{OP_i'}$ と $\overrightarrow{OP_i}$ の内積を表す.

(1) a, b, c を求めよ.

(2) 点 $P(\cos t, \sin t)$ の f による像を P' とする. t が $0 \leq t \leq \pi$ の範囲で変化するとき、 $\overrightarrow{OP'}$ と $\overrightarrow{OP}$ の内積 $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP}$ の最大値と最小値、およびそれらの値を与える t の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

各条件は、移った点と元の単位方向ベクトルの内積を計算すればよい. P_1 から $a = 1$ 、 P_3 から $d = 3$ 、 P_2 から $b + c = 2$ が決まる. b と c は個別には決まらないが、(2) で必要なのは和 $b + c$ だけである. $P = (\cos t, \sin t)$ について内積を三角関数で整理し、 $2 + \sqrt{2} \sin(2t - \pi/4)$ の最大最小を読む.

【解答】

(1)

まず $P_1 = (1, 0)$ である. P_1 が移った点は

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

であるから、条件 $\overrightarrow{OP_1'} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 1$ は $(a, c) \cdot (1, 0) = a = 1$ を意味する. したがって $a = 1$ である.

次に $P_3 = (0, 1)$ である. P_3 が移った点は

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるから $(b, d) \cdot (0, 1) = d = 3$ であり、 $d = 3$ である.

さらに $P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である. P_2 が移った点は $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{c+d}{\sqrt{2}}\right)$ なので、内積は $\frac{a+b+c+d}{2}$ である. これが 3 に等しいから $a+b+c+d = 6$ である. $a = 1$ 、 $d = 3$ を代入して $b+c = 2$ を得る.

以上より、条件から決まるのは $a = 1$, $d = 3$, $b+c = 2$ である. b と c は個別には定まらないが、次の設問では和 $b+c$ だけが必要である.

(2) $P = (\cos t, \sin t)$ とおく. この点が移った点を P' とすると $\overrightarrow{OP'} = (a \cos t + b \sin t, c \cos t + d \sin t)$ である. したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} &= (a \cos t + b \sin t) \cos t + (c \cos t + d \sin t) \sin t \\ &= a \cos^2 t + (b+c) \sin t \cos t + d \sin^2 t \end{aligned}$$

である.

(1) で得た $a = 1$ 、 $d = 3$ 、 $b+c = 2$ を代入すると

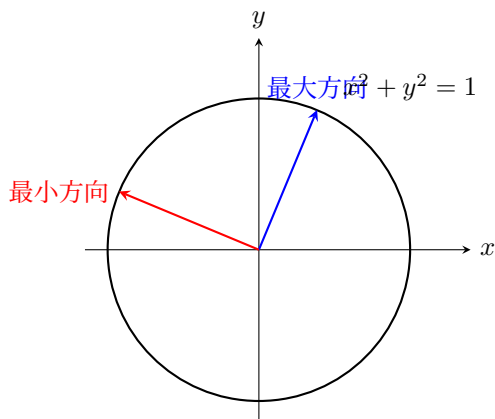
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP} &= \cos^2 t + 2 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t \\ &= 2 - \cos 2t + \sin 2t \\ &= 2 + \sqrt{2} \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

である. $0 \leq t \leq \pi$ なので $2t - \pi/4$ は $-\pi/4$ から $7\pi/4$ まで動く. この範囲で $\sin$ は最大値 1、最小値 -1 をとる.

最大値は $2 + \sqrt{2}$ であり、これは $2t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $t = \frac{3\pi}{8}$ のときである.

最小値は $2 - \sqrt{2}$ であり、これは $2t - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ すなわち $t = \frac{7\pi}{8}$ のときである.

原問題の (1) は a, b, c を求めるよう記載されているが、与えられた 3 条件だけでは b, c を個別には決められない. 決定できるのは $a = 1, d = 3, b+c = 2$ までであり、(2) の値はこの和だけで一意に定まる.



▶ 解法 2

【方針】

内積に影響するのは行列の対称部分だけである。(1) で $a = 1, d = 3, b + c = 2$ を得た後、 $X = y^2 - x^2, Y = 2xy$ と置くと $X^2 + Y^2 = 1$ になる。内積は $2 + X + Y$ なので、コーシー・シュワルツの不等式から最大最小を出す。

【解答】

(1)

P_1, P_3 の条件から直ちに

$$a = 1, \quad d = 3.$$

$P_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ の条件は

$$\frac{a + b + c + d}{2} = 3$$

だから

$$b + c = 2.$$

b, c は個別には定まらず、この和だけが後半に必要である。

(2)

$P = (x, y) = (\cos t, \sin t)$ とおく。求める内積を Q とすると

$$\begin{aligned} Q &= x(ax + by) + y(cx + dy) \\ &= x^2 + 2xy + 3y^2 \\ &= 2 + (y^2 - x^2) + 2xy. \end{aligned}$$

ここで

$$X = y^2 - x^2, \quad Y = 2xy$$

とおくと

$$X^2 + Y^2 = (x^2 + y^2)^2 = 1.$$

コーシー・シュワルツの不等式より

$$-\sqrt{2} \leq X + Y \leq \sqrt{2}.$$

したがって

$$2 - \sqrt{2} \leq Q \leq 2 + \sqrt{2}.$$

最大の等号は $X = Y = 1/\sqrt{2}$ のときである。これは

$$-\cos 2t = \sin 2t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を意味し、 $0 \leq t \leq \pi$ では $t = 3\pi/8$ である。最小の等号は

$$-\cos 2t = \sin 2t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のときで、 $t = 7\pi/8$ である。

よって最大値は $2 + \sqrt{2}$ ($t = 3\pi/8$)、最小値は $2 - \sqrt{2}$ ($t = 7\pi/8$) である。

【総評】 内積条件が、行列の成分そのものではなく対称な組み合わせを決める問題。(1) では $a = 1, d = 3, b + c = 2$ まだが条件から従う内容で、 b, c は個別には決まらないことを明記したい。(2) では内積に現れるのが $b + c$ だけであるため、設問はそのまま解ける。三角関数の整理では $2 - \cos 2t + \sin 2t$ を $2 + \sqrt{2} \sin(2t - \pi/4)$ と書くと、最大最小とその時刻が読み取りやすい。原問題の (1) は記載どおりでは b, c を個別に決定できないため、決定可能な $a = 1, d = 3, b + c = 2$ を明示し、(2) が一意に解けることを確認した。

【第 6 問】

方程式 $x \cos x = 2$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における解を a とする。

(1) 2 つの不等式 $\frac{3}{2}\pi < a < 2\pi$, $\sqrt{a^2 - 4} \geq \frac{4}{5}a$ が成り立つことを示せ。

(2) 2 つの曲線 $y = \sin x$, $y = \frac{x}{4} \sin 2x$ で囲まれる図形で、 $0 \leq x \leq \pi$ に対応する部分の面積を S , $\pi \leq x \leq a$ に対応する部分の面積を T とするとき、 $S > T$ であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $x \cos x$ を $(3\pi/2, 2\pi)$ で調べ、端点値と単調性から解 a の位置を押さえる。 $\sqrt{a^2 - 4} \geq 4a/5$ は 2 乗して $a \geq 10/3$ に直す。面積では 2 曲線の差を $\sin x(1 - x \cos x/2)$ と因数分解し、 $[0, \pi]$ と $[\pi, a]$ で上下関係が逆になることを確認する。積分後、(1) の不等式で $S - T > 0$ を示す。

【解答】

(1) $h(x) = x \cos x$ とおく。区間 $3\pi/2 < x < 2\pi$ では $\cos x > 0$, $\sin x < 0$ であるから $h'(x) = \cos x - x \sin x > 0$ である。したがって $h(x)$ はこの区間で増加する。

また $h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 < 2$, $h(2\pi) = 2\pi > 2$ である。よって方程式 $x \cos x = 2$ の解 a は $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ を満たす。

次に $\sqrt{a^2 - 4} \geq \frac{4}{5}a$ を示す。両辺は正なので、これは 2 乗して $a^2 - 4 \geq \frac{16}{25}a^2$ すなわち $9a^2 \geq 100$ と同値である。したがって $a \geq 10/3$ を示せばよい。上で得た $a > 3\pi/2$ と $\pi > 2$ より $a > \frac{3\pi}{2} > 3 > \frac{10}{3}$ とは言えないので、ここでは標準的な評価 $\pi > \frac{20}{9}$ を用いると $\frac{3\pi}{2} > \frac{10}{3}$ である。よって $a > 10/3$ となり、求める不等式が成り立つ。

(2)

2 曲線の差を調べると

$$\sin x - \frac{x}{4} \sin 2x = \sin x - \frac{x}{2} \sin x \cos x = \sin x \left(1 - \frac{x \cos x}{2}\right)$$

である。 $0 \leq x \leq \pi$ では $\sin x \geq 0$ であり、また $x \cos x \leq 2$ なので $\sin x - \frac{x}{4} \sin 2x \geq 0$ である。したがって

$$S = \int_0^\pi \left\{ \sin x - \frac{x}{4} \sin 2x \right\} dx$$

である。

一方、 $\pi \leq x \leq a$ では $\sin x \leq 0$ であり、 $x \cos x \leq a \cos a = 2$ だから $\sin x - \frac{x}{4} \sin 2x \leq 0$ である。よって

$$T = \int_\pi^a \left\{ \frac{x}{4} \sin 2x - \sin x \right\} dx$$

である。

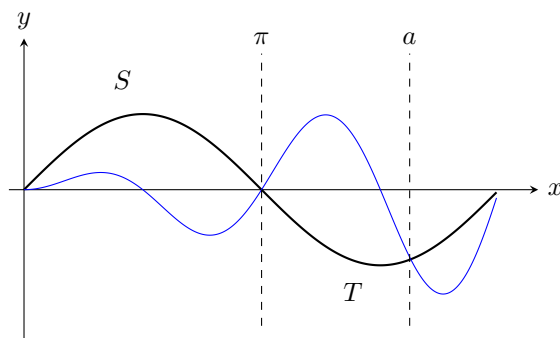
ここで $F(x) = -\cos x + \frac{x \cos 2x}{8} - \frac{\sin 2x}{16}$ とおくと $F'(x) = \sin x - \frac{x}{4} \sin 2x$ である。したがって $S = F(\pi) - F(0) = \left(1 + \frac{\pi}{8}\right) - (-1) = 2 + \frac{\pi}{8}$ である。

また $a \cos a = 2$ で、 $3\pi/2 < a < 2\pi$ だから $\cos a = \frac{2}{a}$, $\sin a = -\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$ である。よって $\cos 2a = \frac{8}{a^2} - 1$, $\sin 2a = -\frac{4\sqrt{a^2 - 4}}{a^2}$ である。これを $F(a)$ に代入すると $F(a) = -\frac{1}{a} - \frac{a}{8} + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{4a^2}$ となる。したがって $T = F(\pi) - F(a) = 1 + \frac{\pi}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a} - \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{4a^2}$ である。

よって $S - T = 1 - \frac{a}{8} - \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{4a^2}$ である。(1) より $\sqrt{a^2 - 4} \geq 4a/5$ だから $S - T \geq 1 - \frac{a}{8} - \frac{1}{a} + \frac{1}{5a} = 1 - \frac{a}{8} - \frac{4}{5a}$ である。さらに $a < 2\pi < 32/5$ であり、 $a > 3\pi/2 > 4$ の範囲では右辺は減少するので

$$1 - \frac{a}{8} - \frac{4}{5a} > 1 - \frac{32/5}{8} - \frac{4}{5 \cdot 4} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 0$$

より実際には正である。したがって $S - T > 0$ であり、 $S > T$ が示された。



▶ 解法 2

【方針】

2 曲線の差 $D(x)$ の符号を区間ごとに確認した後、 S と T を別々に計算せず

$$S - T = \int_0^a D(x) dx$$

とまとめる。原始関数を $a \cos a = 2$ で整理し、(1) の平方根評価と $4 < a < 32/5$ を使って正値を示す。

【解答】

(1)

$h(x) = x \cos x$ とおく。 $3\pi/2 < x < 2\pi$ では

$$h'(x) = \cos x - x \sin x > 0.$$

また $h(3\pi/2) = 0 < 2 < h(2\pi) = 2\pi$ なので、解 a は一意で

$$\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi.$$

$\pi > 20/9$ より $a > 10/3$ である。両辺が正であることに注意して 2 乗すると

$$\sqrt{a^2 - 4} \geq \frac{4}{5}a \iff a^2 - 4 \geq \frac{16}{25}a^2 \iff a \geq \frac{10}{3}.$$

よって第 2 の不等式も成り立つ。

(2)

$$D(x) = \sin x - \frac{x}{4} \sin 2x = \sin x \left(1 - \frac{x \cos x}{2}\right).$$

$0 \leq x \leq \pi$ では $D(x) \geq 0$ 、 $\pi \leq x \leq a$ では $D(x) \leq 0$ である。したがって

$$S - T = \int_0^a D(x) dx.$$

原始関数を

$$F(x) = -\cos x + \frac{x \cos 2x}{8} - \frac{\sin 2x}{16}$$

とすれば

$$S - T = F(a) - F(0) = F(a) + 1.$$

$a \cos a = 2$ 、かつ $\sin a < 0$ より

$$\cos a = \frac{2}{a}, \quad \sin a = -\frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}.$$

倍角公式を用いて整理すると

$$S - T = 1 - \frac{a}{8} - \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{4a^2}.$$

(1) から

$$S - T \geq 1 - \frac{a}{8} - \frac{4}{5a}.$$

さらに $a < 2\pi < 32/5$ 、 $a > 3\pi/2 > 4$ なので

$$1 - \frac{a}{8} - \frac{4}{5a} > 1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 0.$$

よって $S - T > 0$ 、すなわち $S > T$ である。

【総評】 三角方程式の解の位置評価と、面積差の符号評価を組み合わせる問題。(1) では $(3\pi/2, 2\pi)$ で $x \cos x$ が増加することを確認し、解の位置をただの図示で済ませないことが重要である。(2) は 2 曲線の差を $\sin x(1 - x \cos x/2)$ と因数分解すると、区間ごとの上下関係が明確になる。積分後の $S - T$ はそのままでは分かりにくいので、(1) の $\sqrt{a^2 - 4}$ の下からの評価を使うのが誘導の意図である。面積を別々に求める方法と差を一括積分する方法で $S - T$ を照合し、誘導不等式から正値を示した。