

東北大学 1994 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

x に関する 3 次方程式 $(x+a)^3 - 3x - a^2 = 0$ が負の解をもたないように実数 a の範囲を定めよ。

▶ 解法 1

【方針】

負の解をもたない条件は、三次関数 $F(x) = (x+a)^3 - 3x - a^2$ が半直線 $x < 0$ で 0 にならない条件である。 $x \rightarrow -\infty$ では $F(x) \rightarrow -\infty$ なので、 $x < 0$ での最大値が 0 未満であればよい。極大点 $x = -a - 1$ が負の範囲に入るか、また端点 $x = 0$ に近づくときの値がどうなるかを場合分けして、必要十分条件を得る。

【解答】

(1) $F(x) = (x+a)^3 - 3x - a^2$ とおく。求める条件は、 $x < 0$ において $F(x) = 0$ となる x が存在しないことである。

まず

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$$

である。したがって、 $x < 0$ で一度でも $F(x) > 0$ になれば、その手前で 0 を通り、負の解をもつ。逆に $x < 0$ で常に $F(x) < 0$ なら負の解をもたない。

導関数は $F'(x) = 3(x+a)^2 - 3 = 3\{(x+a)^2 - 1\}$ である。よって極値をとる候補は $x = -a - 1$, $x = -a + 1$ である。符号変化から、 $x = -a - 1$ が極大点、 $x = -a + 1$ が極小点である。 $a \leq -1$ のとき、極大点 $-a - 1$ は 0 以上であり、 $x < 0$ では $F(x)$ は増加し続ける。また $F(0) = a^3 - a^2 = a^2(a - 1) < 0$ なので、 $x < 0$ では常に $F(x) < 0$ である。したがってこの場合は条件を満たす。

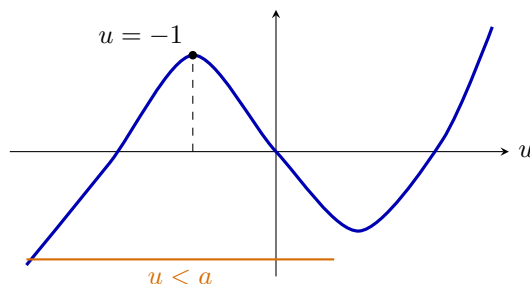
次に $a > -1$ とする。このとき極大点 $-a - 1$ は負の範囲に入る。負の解をもたないためには、この極大値が 0 未満でなければならない。実際、極大値が 0 以上なら、 $-\infty$ で負だった値が 0 に達するので負の解をもつ。

極大値は $F(-a-1) = (-1)^3 - 3(-a-1) - a^2 = -a^2 + 3a + 2$ である。したがって必要な条件は $-a^2 + 3a + 2 < 0$ である。これは $a^2 - 3a - 2 > 0$ すなわち $a < \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ または $a > \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ である。

ただし $a > 1$ の場合は $F(0) = a^2(a-1) > 0$ であり、 $x < 0$ のどこかで 0 を通る。したがって $a > 1$ は除かれる。結局、 $a > -1$ の範囲で残るのは $-1 < a < \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ である。 $a \leq -1$ の場合と合わせて $a < \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ である。

等号 $a = (3 - \sqrt{17})/2$ では、負の極大点で $F(x) = 0$ となるため、負の解をもつ。したがって等号は含まない。

【負の半直線と極大点】



▶ 解法 2

【方針】

変数を $u = x + a$ と移し、負の解に対応する半直線 $u < a$ 上で三次式 $u^3 - 3u + 3a - a^2$ の符号を調べる。端点と極大値を比較し、等号で負の重解が生じることまで確認する。

【解答】

$u = x + a$ とおくと、方程式は

$$H(u) = u^3 - 3u + 3a - a^2 = 0$$

となり、負の解 $x < 0$ は $u < a$ の解に対応する。 $H(u) \rightarrow -\infty$ ($u \rightarrow -\infty$) であり、

$$H'(u) = 3(u^2 - 1)$$

だから極大点は $u = -1$ である。

$a \leq -1$ なら半直線 $u < a$ は極大点の左側にあり、 H はそこで増加する。さらに

$$H(a) = a^3 - a^2 = a^2(a - 1) < 0$$

だから $u < a$ では $H(u) < 0$ で、負の解はない。

$a > -1$ なら極大点 $u = -1$ が $u < a$ に入る。負の解を生じさせないためには

$$H(-1) = -a^2 + 3a + 2 < 0$$

が必要である。また $a > 1$ では $H(a) > 0$ なので、連続性から $u < a$ に零点が生じる。したがって $a \leq 1$ のもとで上の不等式を解けば

$$a < \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$$

を得る。等号では $u = -1 < a$ が零点になるため含まれない。

【総評】 負の半直線上で三次関数の最大値を調べる問題。目安時間は 25 分前後。 $x < 0$ が开区間であるため、端点 $x = 0$ の値と、内部の極大点を分けて見る必要がある。特に $a > 1$ では $F(0) > 0$ となり、極大値だけでなく 0 に近い側で根が出る点を落としやすい。等号では負の重解をもつので、最後は不等号を厳密に処理したい。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 2 問】

原点を O とする空間に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ をとり、四面体 $OABC$ を考える。ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする。

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式、および、原点とこの平面との距離 h を a, b, c で表せ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を a, b, c で表せ。
- (3) $\triangle ABC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積をそれぞれ S_0, S_1, S_2, S_3 とし、各三角形の単位法線ベクトルで四面体 $OABC$ の内部から外に向かうものを、 $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ とする。ベクトル

$$S_0\vec{u}_0 + S_1\vec{u}_1 + S_2\vec{u}_2 + S_3\vec{u}_3$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 3 点 A, B, C を通る切片形の平面として求め、原点から平面までの距離公式を使う。(2) は四面体 $OABC$ の体積を、底面を ABC 、高さを h と見た式と、座標軸上の切片から得られる体積 $abc/6$ とで比較する。(3) は各面の「面積 $\times$ 外向き単位法線」を直接成分で計算し、4 つを足して 0 になることを確認する。

【解答】

(1)

平面 ABC は、 x 軸、 y 軸、 z 軸との切片がそれぞれ a, b, c である。したがって $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ である。すなわち $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z - 1 = 0$ である。

原点とこの平面との距離 h は $h = \frac{1}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}}$ である。分母分子に abc を掛けると $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ となる。

(2)

四面体 $OABC$ は、互いに直交する 3 本の辺 $OA = a$ 、 $OB = b$ 、 $OC = c$ をもつので、その体積は $\frac{abc}{6}$ である。一方、 $\triangle ABC$ を底面、原点から平面 ABC までの距離を高さと見ると、体積は $\frac{1}{3}[ABC]h$ である。よって $\frac{1}{3}[ABC]h = \frac{abc}{6}$ であり、(1) の h を代入すると $[ABC] = \frac{abc}{2h} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ である。したがって $[ABC] = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ である。

(3)

まず面 ABC について考える。平面 ABC の方程式は $\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 1$ であり、四面体の内部にある原点は左辺が 0 になる側にある。したがって外向きの単位法線は、 $(1/a, 1/b, 1/c)$ と同じ向きである。(2) の面積を掛けると $S_0\vec{u}_0 = \frac{1}{2}(bc, ca, ab)$ である。

次に、面 OAB は $z = 0$ 上にあり、内部は $z > 0$ 側にあるので、外向き単位法線は $(0, 0, -1)$ である。面積は $ab/2$ だから $S_1\vec{u}_1 = \left(0, 0, -\frac{ab}{2}\right)$ である。

同様に、面 OBC は $x = 0$ 上にあり、外向きは負の x 方向であるから $S_2\vec{u}_2 = \left(-\frac{bc}{2}, 0, 0\right)$ である。また、面 OCA は $y = 0$ 上にあり、外向きは負の y 方向であるから $S_3\vec{u}_3 = \left(0, -\frac{ca}{2}, 0\right)$ である。

これらを足すと

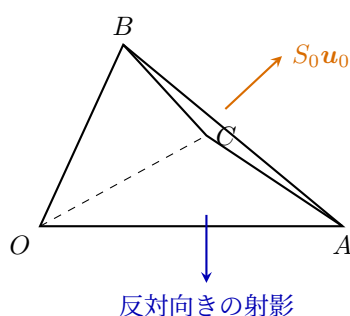
$$\frac{1}{2}(bc, ca, ab) + \left(0, 0, -\frac{ab}{2}\right) + \left(-\frac{bc}{2}, 0, 0\right) + \left(0, -\frac{ca}{2}, 0\right) = (0, 0, 0)$$

である。したがって

$$S_0\vec{u}_0 + S_1\vec{u}_1 + S_2\vec{u}_2 + S_3\vec{u}_3 = \vec{0}$$

である。

【四面体と外向き面積ベクトル】



▶ 解法 2

【方針】

面積は 2 辺の内積から直接求める。(3) は各面を座標平面へ正射影した符号付き面積を成分ごとに比較し、閉じた四面体では外向き面積ベクトルが相殺することを示す。

【解答】

(1) 平面の切片形から

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

である。三角形の面積を S とすると、内積による面積公式から

$$\begin{aligned} 4S^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + c^2) - a^4 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2. \end{aligned}$$

よって

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

(3) ベクトル $S_i \vec{u}_i$ の各成分は、その面に対応する座標平面へ正射影した符号付き面積である。例えば x 成分では、面 ABC の yz 平面への射影は面 OBC と同じ三角形で、外向きは互いに反対である。したがって両者の x 成分は相殺する。同様に y, z 成分もそれぞれ面 OCA 、面 OAB と相殺する。ゆえに

$$S_0 \vec{u}_0 + S_1 \vec{u}_1 + S_2 \vec{u}_2 + S_3 \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

【総評】 切片形、距離、体積、外向き法線を連動させる空間図形問題。目安時間は 25 分前後。(1)(2) は公式の使い方が中心だが、(3) は向きの確認が得点差になる。特に座標平面上の 3 面は外向きが負方向であり、符号を逆にすると和が 0 にならない。面 ABC だけを抽象的に済ませず、成分で確認すると答案の信頼性が上がる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 3 問】

行列

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin \theta & 2 \cos \theta \\ a & b \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin \theta & a \\ 2 \cos \theta & b \end{pmatrix}$$

において、 A は逆行列 A^{-1} をもち、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 、 $ab \geq 0$ とする。 $B = 3A^{-1}$ が成り立つとき、次に答えよ。

(1) A を求めよ。

(2) A の表す xy 平面上の 1 次変換によって、円 $x^2 + y^2 = 1$ はどのような図形に移るか。その方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

B は A の転置行列なので、条件 $B = 3A^{-1}$ を $A^T A = 3E$ に直す。これは A の 2 本の列ベクトルが、ともに長さ $\sqrt{3}$ で互いに垂直であることを意味する。列の長さから $\cos^2 \theta = 1/2$ を導き、さらに $ab \geq 0$ で θ の候補を絞る。円の移った図形は、長さが常に $\sqrt{3}$ 倍されることから決める。

【解答】

(1)

与えられた 2 つの行列を見ると $B = A^T$ である。条件 $B = 3A^{-1}$ より $A^T = 3A^{-1}$ であるから、右から A を掛けて $A^T A = 3E$ を得る。これは、 A の 2 つの列ベクトルがともに長さ $\sqrt{3}$ で、互いに垂直であることを表す。

第 1 列と第 2 列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \sin \theta \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ b \end{pmatrix}$$

である。したがって $2 \sin^2 \theta + a^2 = 3 \cdot 4 \cos^2 \theta + b^2 = 3 \cdot 2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta + ab = 0$ が成り立つ。 $u = \cos^2 \theta$ とおくと、上の 2 つの長さ条件から $a^2 = 1 + 2u$, $b^2 = 3 - 4u$ である。また内積条件を 2 乗すると $a^2 b^2 = 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 8(1 - u)u$ である。よって $(1 + 2u)(3 - 4u) = 8u(1 - u)$ となり、整理して $3 - 6u = 0$ を得る。したがって $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ である。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ かつ $\sin \theta \geq 0$ なので、候補は $\theta = 45^\circ$, $\theta = 135^\circ$ である。 $\theta = 45^\circ$ のときは $2\sqrt{2} \sin \theta \cos \theta > 0$ だから、内積条件より $ab < 0$ となり、条件 $ab \geq 0$ に反する。したがって $\theta = 135^\circ$ である。

このとき $\sqrt{2} \sin \theta = 1$, $2 \cos \theta = -\sqrt{2}$ であり、長さ条件から $a^2 = 2$, $b^2 = 1$ である。さらに内積条件から $ab = \sqrt{2}$ である。よって $(a, b) = (\sqrt{2}, 1)$, $(a, b) = (-\sqrt{2}, -1)$ の 2 通りである。

したがって求める行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

または

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

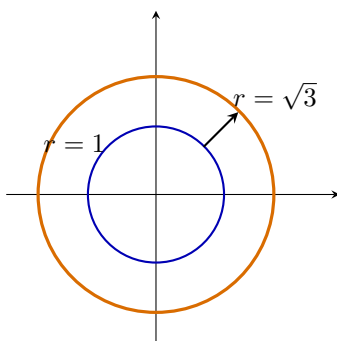
である。

(2)

(1) で得たどちらの行列についても $A^T A = 3E$ が成り立つ。点 (x, y) を列ベクトル X とし、移った点を $Y = AX$ とすると $|Y|^2 = Y^T Y = (AX)^T (AX) = X^T A^T A X = 3X^T X = 3(x^2 + y^2)$ である。

もとの点が円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を動くとき、移った点 (X, Y) は $X^2 + Y^2 = 3$ を満たす。逆に A は逆行列をもつので、この円周上の各点はもとの円周上の点から移ってくる。したがって求める図形は $x^2 + y^2 = 3$ で表される円である。

【単位円の像】



▶ 解法 2

【方針】

逆行列を成分表示して条件を直接比較する。行列式を消去して三角関数と a, b の関係を決め、最後に $A^T A = 3E$ から像の方程式を得る。

【解答】

(1)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} b & -2 \cos \theta \\ -a & \sqrt{2} \sin \theta \end{pmatrix}$$

である。 $B = 3A^{-1}$ の各成分を比較し、両辺に $\det A$ を掛けると

$$\sqrt{2} \sin \theta \det A = 3b, \quad a \det A = -6 \cos \theta,$$

$$2 \cos \theta \det A = -3a, \quad b \det A = 3\sqrt{2} \sin \theta.$$

第 2・第 3 式から、 $a \neq 0$ の場合は $(\det A)^2 = 18$ が得られ、第 1・第 4 式も合わせると列の長さはともに $\sqrt{3}$ 、内積は 0 となる。すなわち

$$A^T A = 3E.$$

この成分条件を解くと

$$\theta = 135^\circ, \quad a^2 = 2, \quad b^2 = 1, \quad ab = \sqrt{2}.$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 像の点を $y = Ax$ とすると

$$|y|^2 = x^T A^T A x = 3|x|^2.$$

よって単位円の像は

$$x^2 + y^2 = 3$$

である。

【総評】 逆行列条件を長さとの条件へ変換する行列問題。目安時間は 25 分前後。 $B = A^T$ に気づけば $A^T A = 3E$ となり、列ベクトルの長さとの内積だけで処理できる。 $\cos^2 \theta = 1/2$ の後、 $ab \geq 0$ によって 45° を除くところが重要である。(2) は個別に点を追うより、 $|AX|^2 = 3|X|^2$ を示すと短く確実である。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 4 問】

2 次関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次のように定義する。

$$f_1(x) = 3x^2, \quad f_2(x) = 3x^2 + 4x,$$

$$f_n(x) = 3x^2 + 4x \int_0^1 f_{n-1}(t)dt - \int_0^1 f_{n-2}(t)dt \quad (n \geq 3)$$

(1) $a_1 = 0$,

$$a_n = \int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

($n \geq 2$) とおくとき、 a_n を a_{n-1} と a_{n-2} で表す漸化式を求めよ。

(2) $f_n(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

a_n は 1 つ前の関数の積分値として定義されているので、まず $f_n(x)$ を a_n, a_{n-1} で表す。これを $[0, 1]$ で積分すると a_{n+1} の漸化式が得られる。漸化式は階差 $a_{n+1} - a_n$ を見ると等差的に解けるので、 a_n を求めてから $f_n(x)$ に戻す。

【解答】

(1)

定義より、 $n \geq 3$ では

$$f_n(x) = 3x^2 + 4x \int_0^1 f_{n-1}(t)dt - \int_0^1 f_{n-2}(t)dt$$

である。ここで

$$a_n = \int_0^1 f_{n-1}(t)dt$$

だから、 $n \geq 2$ について $f_n(x) = 3x^2 + 4a_n x - a_{n-1}$ と書ける。実際、 $n = 2$ でも

$$a_2 = \int_0^1 f_1(t)dt = 1$$

、 $a_1 = 0$ より $f_2(x) = 3x^2 + 4x$ となり一致する。

この式を 0 から 1 まで積分すると

$$a_{n+1} = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (3x^2 + 4a_n x - a_{n-1})dx$$

である。したがって $a_{n+1} = 1 + 2a_n - a_{n-1}$ である。添字を 1 つ下げれば、 $n \geq 3$ に対して $a_n = 1 + 2a_{n-1} - a_{n-2}$ である。

(2)

まず

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \int_0^1 f_1(t)dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1$$

である。(1) の漸化式を $a_{n+1} - a_n = (a_n - a_{n-1}) + 1$ と書く。ここで $d_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと $d_n = d_{n-1} + 1$ であり、 $d_1 = a_2 - a_1 = 1$ だから $d_n = n$ である。したがって

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

である。

よって $f_n(x) = 3x^2 + 4a_nx - a_{n-1}$ に代入して $f_n(x) = 3x^2 + 2n(n-1)x - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ を得る。 $n=1$ でも右辺は $3x^2$ となるので、すべての $n \geq 1$ について $f_n(x) = 3x^2 + 2n(n-1)x - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

得られる 2 階漸化式の特解を先に見抜き、差を取らずに同次化する。初期値がともに 0 になることから数列を一意に決め、関数列へ戻す。

【解答】

(1) 定義から

$$f_n(x) = 3x^2 + 4a_nx - a_{n-1}$$

である。両辺を 0 から 1 まで積分すれば

$$a_{n+1} = 1 + 2a_n - a_{n-1},$$

したがって

$$a_n = 1 + 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

(2) この漸化式の特解として

$$p_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

を取れる。 $b_n = a_n - p_n$ とおくと

$$b_{n+1} = 2b_n - b_{n-1}.$$

一方、 $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ であり、 $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ だから $b_1 = b_2 = 0$ である。よって帰納的に $b_n = 0$ 、すなわち

$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

これを $f_n(x) = 3x^2 + 4a_nx - a_{n-1}$ へ代入して

$$f_n(x) = 3x^2 + 2n(n-1)x - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

を得る。

【総評】 積分で定義された関数列を、数列の漸化式へ落とす問題。目安時間は 20 分前後。 $f_n(x) = 3x^2 + 4a_nx - a_{n-1}$ と書けることを確認すると、あとは積分だけで進む。階差 $a_{n+1} - a_n$ を導入すれば計算は短い。最後に $n=1$ でも得られた式が成り立つことを確認すると、場合分けのないきれいな結論になる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。