

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 1994 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面に, 曲線 $K : \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{3y^2}{c^2-a^2} = 1$ ($0 < a < c$) がある. 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって, 曲線 K が図形 K' に移されれるとする. このとき, $K' \subset \{(x, y) | x < 0, x + y < 0\}$ となるように θ の範囲を定めよ. ただし, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする.

第 2 問

- (1) $x \leq \log_2 \frac{x^3 - 1}{x^3} \leq 1$ を満たす x の範囲を求めよ.
- (2) xy 平面において, x 座標が (1) を満たす点の集合と $3x \leq y \leq x^3 + 2$ で表される図形との共通部分の面積 A を求めよ.

第 3 問

xy 平面の原点を O とし，直線 $L : x = 1$ ，曲線 $C : y = x \log x$ ($x > 0$) と， L 上を動く点 P を考える．時刻 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) のときの P の速度ベクトルは $(0, \sqrt{2} \cos t)$ で， P は $t = 0$ のとき点 $(1, 0)$ にある．直線 OP と C との交点を Q とする．ただし，対数は自然対数とする．動点 Q の速度ベクトルの x 成分が最大，最小となる時刻と，そのときの Q の座標をそれぞれ求めよ．

第 4 問

1 から 20 までの目が等確率で出る正二十面体のサイコロを考える. このような N 個のサイコロを同時に投げ, 出た目の数の和が $N + 19$ になる確率を P_N とおく.

(1) P_N を求めよ.

(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P_N$$

を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

第 5 問

微分可能な関数 $f(x)$ が、ある定数 $a \neq 0$ に対して $f'(x) = af(1-x)$ を満たし、 $x=0$ で最大値 2 をとるとする． $g(x) = \{f(x)\}^2 + \{f(1-x)\}^2$ とおく．

(1) $g(x)$ は x によらない定数であることを示せ．

(2) $g(x)$ を求めよ．

(3) 積分

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

の値を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)