

東北大学 1994 年度 理系（後期）

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面に、曲線 $K: \frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{3y^2}{c^2-a^2} = 1$ ($0 < a < c$) がある。行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換に

よって、曲線 K が図形 K' に移されるとする。このとき、 $K' \subset \{(x, y) | x < 0, x + y < 0\}$ となるように θ の範囲を定めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする。

▶ 解法 1

【方針】

楕円 K を中心 $(c, 0)$ 、横半径 a 、縦半径 $b = \sqrt{(c^2 - a^2)/3}$ として表す。回転後の図形が半平面 $x < 0$ に入る条件は、回転前の点に対する線形式 x' の最大値が 0 未満であること。同様に $x' + y'$ の最大値が 0 未満であることを調べる。楕円上での線形式の最大値を平方完成で求め、2 つの角度範囲を交差させる。

【解答】

(1)

楕円 K 上の点は $(x, y) = (c + a \cos u, b \sin u)$, $b^2 = \frac{c^2 - a^2}{3}$ と表せる。回転後の座標を (X, Y) とすると $X = x \cos \theta - y \sin \theta$, $Y = x \sin \theta + y \cos \theta$ である。

まず、すべての点で $X < 0$ となる条件を求める。楕円上での X の最大値は $c \cos \theta + \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$ である。したがって必要十分条件は $c \cos \theta + \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} < 0$ である。平方根は 0 以上なので、まず $\cos \theta < 0$ が必要である。このもとで両辺を移して 2 乗すると $c^2 \cos^2 \theta > a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$ である。 $b^2 = (c^2 - a^2)/3$ を代入して、 $c^2 - a^2 > 0$ で割ると $\cos^2 \theta > \frac{1}{3} \sin^2 \theta$ となる。よって $150^\circ < \theta < 210^\circ$ である。

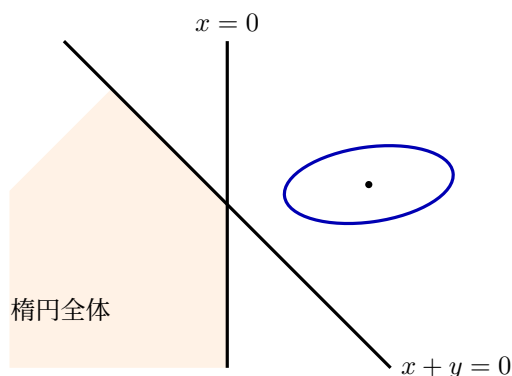
次に、すべての点で $X + Y < 0$ となる条件を求める。 $X + Y = (\cos \theta + \sin \theta)x + (\cos \theta - \sin \theta)y$ であるから、楕円上での最大値は

$$c(\cos \theta + \sin \theta) + \sqrt{a^2(\cos \theta + \sin \theta)^2 + b^2(\cos \theta - \sin \theta)^2}$$

である。これが 0 未満になるためには、まず $\cos \theta + \sin \theta < 0$ が必要である。そのもとで同様に 2 乗すると $(c^2 - a^2)(\cos \theta + \sin \theta)^2 > b^2(\cos \theta - \sin \theta)^2$ であり、 $b^2 = (c^2 - a^2)/3$ より $(\cos \theta + \sin \theta)^2 > \frac{1}{3}(\cos \theta - \sin \theta)^2$ となる。 $\cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos(\theta - 45^\circ)$ 、 $\cos \theta - \sin \theta = -\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ)$ を用いると、この条件は $\cos(\theta - 45^\circ) < 0$, $|\tan(\theta - 45^\circ)| < \sqrt{3}$ である。したがって $165^\circ < \theta < 285^\circ$ である。

2 つの条件を同時に満たす範囲は $(150^\circ, 210^\circ) \cap (165^\circ, 285^\circ)$ である。よって求める範囲は $165^\circ < \theta < 210^\circ$ である。端点では楕円が境界直線に接するため、条件の < 0 を満たさない。

【回転楕円と 2 つの開半平面】



▶ 解法 2

【方針】

回転後の 2 つの半平面を回転前へ戻し、楕円の中心から各境界直線までの余裕と、その法線方向の半径を比較する。2 条件の角度区間を幾何的に交差させる。

【解答】

回転後の条件 $X < 0$ を回転前へ戻すと

$$x \cos \theta - y \sin \theta < 0$$

である。楕円の中心 $(c, 0)$ の左辺は $c \cos \theta$ 、その法線方向の半径は

$$\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}, \quad b^2 = \frac{c^2 - a^2}{3}.$$

中心値に半径を加えても負である条件を整理すると

$$150^\circ < \theta < 210^\circ.$$

同様に $X + Y < 0$ を回転前へ戻すと、法線方向は

$$(\cos \theta + \sin \theta, \cos \theta - \sin \theta)$$

である。中心値とその方向の半径を比較し、同じく平方して整理すると

$$165^\circ < \theta < 285^\circ.$$

したがって 2 つの開半平面へ楕円全体が入るための必要十分条件は

$$165^\circ < \theta < 210^\circ.$$

端点では楕円が境界線へ接するので含まれない。

【総評】 回転した楕円全体を 2 つの半平面に入れる条件を調べる問題。目安時間は 30 分前後。個々の点を追うのではなく、楕円上で線形式が取り得る最大値を調べるのが要点である。 $x < 0$ から $150^\circ < \theta < 210^\circ$ 、 $x + y < 0$ から $165^\circ < \theta < 285^\circ$ が出るため、最終的な共通範囲は $165^\circ < \theta < 210^\circ$ である。端点は境界に触れるので含めない。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 2 問】

- (1) $x \leq \log_2 \frac{x^3 - 1}{x^3} \leq 1$ を満たす x の範囲を求めよ。
- (2) xy 平面において、 x 座標が (1) を満たす点の集合と $3x \leq y \leq x^3 + 2$ で表される図形との共通部分の面積 A を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず対数の真数条件から $x < 0$ または $x > 1$ に分ける。 $x > 1$ では対数が負になり左側の不等式に反するので除外し、 $x < 0$ で右側の不等式だけを処理する。(2) ではさらに $3x \leq x^3 + 2$ が必要なので、(1) の範囲と交差させ、上下差を積分して面積を出す。

【解答】

(1)

まず対数の真数条件を調べる。 $\frac{x^3 - 1}{x^3} = 1 - \frac{1}{x^3} > 0$ でなければならない。これは $x < 0$ または $x > 1$ である。 $x > 1$ のときは $0 < \frac{x^3 - 1}{x^3} < 1$ なので $\log_2 \frac{x^3 - 1}{x^3} < 0$ である。しかし $x > 1$ だから、 $x \leq \log_2((x^3 - 1)/x^3)$ は成り立たない。したがって $x > 1$ は除かれる。

次に $x < 0$ とする。このとき $\frac{x^3 - 1}{x^3} > 1$ なので対数は正である。したがって左側の不等式 $x \leq \log_2 \frac{x^3 - 1}{x^3}$ は自動的に成り立つ。残る条件は $\log_2 \frac{x^3 - 1}{x^3} \leq 1$ である。底が 2 で 1 より大きいので、これは $\frac{x^3 - 1}{x^3} \leq 2$ と同値である。すなわち

$1 - \frac{1}{x^3} \leq 2$ より $-\frac{1}{x^3} \leq 1$ である。 $x^3 < 0$ なので両辺に x^3 を掛けると不等号の向きが変わり、 $-1 \geq x^3$ となる。したがって $x \leq -1$ である。

よって求める範囲は $x \leq -1$ である。

(2)

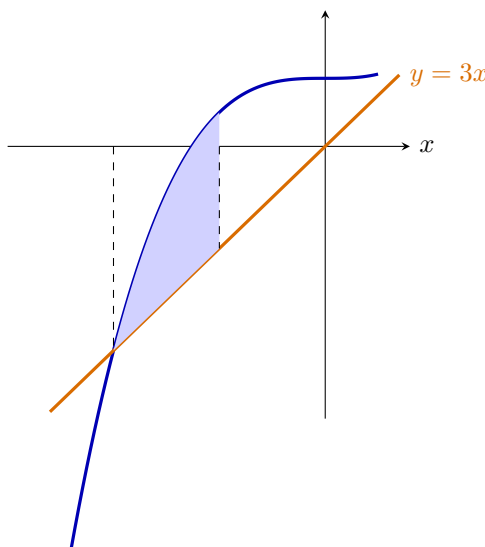
(1) より、対象となる x は $x \leq -1$ である。また図形 $3x \leq y \leq x^3 + 2$ が存在するためには $3x \leq x^3 + 2$ が必要である。これは $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ であり、因数分解すると $(x-1)^2(x+2) \geq 0$ である。 $(x-1)^2 \geq 0$ だから、 $x \neq 1$ では符号は $x+2$ で決まる。 $x \leq -1$ と合わせると $-2 \leq x \leq -1$ である。

したがって面積 A は

$$A = \int_{-2}^{-1} \{(x^3 + 2) - 3x\} dx$$

である。計算すると $A = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{-1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 \right) - (4 - 6 - 4) = \frac{11}{4}$ である。よって $A = \frac{11}{4}$ である。

【面積を与える区間】



▶ 解法 2

【方針】

負の範囲では $u = -x$ と置き、対数不等式を正の変数の不等式へ直す。面積は上下差を先に因数分解し、符号から積分区間を確定する。

【解答】

(1) 真数条件は $x < 0$ または $x > 1$ である。 $x > 1$ では対数が負で $x \leq \log_2((x^3 - 1)/x^3)$ に反する。

$x = -u$, $u > 0$ とおくと

$$\frac{x^3 - 1}{x^3} = 1 + \frac{1}{u^3}.$$

左側の不等式は自動的に成り立ち、右側は

$$1 + \frac{1}{u^3} \leq 2$$

すなわち $u \geq 1$ である。よって

$$x \leq -1.$$

(2) 上下差は

$$x^3 + 2 - 3x = (x-1)^2(x+2).$$

$x \leq -1$ と合わせると、領域が存在する範囲は

$$-2 \leq x \leq -1.$$

したがって

$$A = \int_{-2}^{-1} (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{11}{4}.$$

【総評】 対数不等式と面積計算をつなぐ問題。目安時間は 20 分前後。真数条件で $x < 0$ と $x > 1$ が出るが、 $x > 1$ は対数が負になるためすぐ除外できる。 $x < 0$ で不等式に x^3 を掛けるとき、不等号の向きが変わる点に注意点である。面積では $(x-1)^2(x+2)$ の符号から $[-2, -1]$ に絞ると、積分範囲を迷わない。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 3 問】

xy 平面の原点を O とし、直線 $L: x = 1$ 、曲線 $C: y = x \log x$ ($x > 0$) と、 L 上を動く点 P を考える。時刻 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) のときの P の速度ベクトルは $(0, \sqrt{2} \cos t)$ で、 P は $t = 0$ のとき点 $(1, 0)$ にある。直線 OP と C との交点を Q とする。ただし、対数は自然対数とする。動点 Q の速度ベクトルの x 成分が最大、最小となる時刻と、そのときの Q の座標をそれぞれ求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず速度を積分して $P = (1, \sqrt{2} \sin t)$ を求める。直線 OP の傾きは $\sqrt{2} \sin t$ なので、曲線 $y = x \log x$ との交点は $\log x = \sqrt{2} \sin t$ から媒介表示できる。 Q の x 座標を微分して速度の x 成分を出し、その最大・最小を $0 \leq t \leq 2\pi$ で調べる。

【解答】

(1)

点 P は直線 $x = 1$ 上を動き、速度ベクトルは $(0, \sqrt{2} \cos t)$ である。 $t = 0$ で $P = (1, 0)$ だから、 P の座標は $P = (1, \sqrt{2} \sin t)$ である。

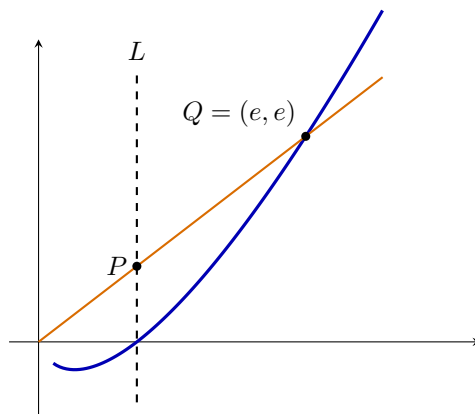
直線 OP は原点と P を通るので、その方程式は $y = \sqrt{2} \sin t x$ である。点 Q はこの直線と曲線 $C: y = x \log x$ の交点であり、 $x > 0$ だから $x \log x = \sqrt{2} \sin t x$ より $\log x = \sqrt{2} \sin t$ である。したがって $x = e^{\sqrt{2} \sin t}$ であり、 $Q = (e^{\sqrt{2} \sin t}, \sqrt{2} \sin t e^{\sqrt{2} \sin t})$ である。 Q の速度ベクトルの x 成分は、 Q の x 座標を t で微分して $\frac{d}{dt} e^{\sqrt{2} \sin t} = \sqrt{2} \cos t e^{\sqrt{2} \sin t}$ である。これを $v(t) = \sqrt{2} \cos t e^{\sqrt{2} \sin t}$ とおく。

微分すると $v'(t) = \sqrt{2} e^{\sqrt{2} \sin t} \{-\sin t + \sqrt{2} \cos^2 t\}$ である。 $s = \sin t$ とおくと、 $v'(t) = 0$ は $-s + \sqrt{2}(1 - s^2) = 0$ すなわち $\sqrt{2}s^2 + s - \sqrt{2} = 0$ である。これを解くと $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ だけが $-1 \leq s \leq 1$ に入る。したがって候補は $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ である。

それぞれの値は $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = e$, $v\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -e$ である。端点や他の点での値はこれを超えないので、最大は $t = \pi/4$ 、最小は $t = 3\pi/4$ である。このとき $\sqrt{2} \sin t = 1$ なので、どちらの場合も $Q = (e, e)$ である。

よって 最大: $t = \frac{\pi}{4}$, $Q = (e, e)$ 最小: $t = \frac{3\pi}{4}$, $Q = (e, e)$ である。

【直線 OP と曲線 C 】



▶ 解法 2

【方針】

速度の大きさを二乗して $\sin t$ だけの関数へ落とす。符号は $\cos t$ が決めるため、同じ $\sin t$ で最大と最小が対になって現れることを利用する。

【解答】

速度を積分すると

$$P = (1, \sqrt{2} \sin t).$$

したがって直線 OP と $y = x \log x$ の交点は

$$Q = (e^{\sqrt{2} \sin t}, \sqrt{2} \sin t e^{\sqrt{2} \sin t}).$$

x 方向の速度は

$$v(t) = \sqrt{2} \cos t e^{\sqrt{2} \sin t}.$$

$s = \sin t$ とおくと

$$v(t)^2 = 2(1 - s^2)e^{2\sqrt{2}s}.$$

その対数を s で微分すると

$$-\frac{2s}{1-s^2} + 2\sqrt{2} = 0,$$

区間 $[-1, 1]$ にある解は $s = 1/\sqrt{2}$ だけである。このとき $|v| = e$ 。 $\cos t > 0$ となる

$$t = \frac{\pi}{4}$$

で最大 e 、 $\cos t < 0$ となる

$$t = \frac{3\pi}{4}$$

で最小 $-e$ となる。どちらも

$$Q = (e, e)$$

である。

【総評】 動点の速度から位置を出し、交点を媒介表示して速度を調べる問題。目安時間は 25 分前後。 $P = (1, \sqrt{2} \sin t)$ とした後、直線 OP と $y = x \log x$ の交点条件を $\log x = \sqrt{2} \sin t$ に落とすのが要点である。速度の x 成分の極値では、 $\sin t = 1/\sqrt{2}$ から 2 つの時刻が出て、同じ点 (e, e) で最大と最小が起こる点特徴的である。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 4 問】

1 から 20 までの目が等確率で出る正二十面体のサイコロを考える。このような N 個のサイコロを同時に投げ、出た目の数の和が $N + 19$ になる確率を P_N とおく。

(1) P_N を求めよ。

(2)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P_N$$

を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

▶ 解法 1

【方針】

各サイコロの目から 1 を引き、非負整数解の個数として数える。和が 19 なので上限条件は自動的に満たされる。極限では組合せ部分が多項式増加、全事象の 20^N が指数減少を担うことを評価する。

【解答】

(1) i 個目の目を X_i とし、 $Y_i = X_i - 1$ とおく。条件は

$$Y_1 + \cdots + Y_N = 19, \quad Y_i \geq 0$$

となる。和が 19 なので $Y_i \leq 19$ は自動的に満たされる。非負整数解の個数は、19 個の仕切られない同じものを N 箱へ分ける重複組合せ

$${}_{N+18}C_{19}$$

である。全事象は 20^N 通りだから

$$P_N = \frac{{}_{N+18}C_{19}}{20^N}.$$

特に $N = 1$ では $P_1 = 1/20$ となり、添字も確認できる。

(2)

$$\frac{1}{N} \log P_N = \frac{1}{N} \log {}_{N+18}C_{19} - \log 20.$$

ここで

$${}_{N+18}C_{19} = \frac{N(N+1) \cdots (N+18)}{19!}$$

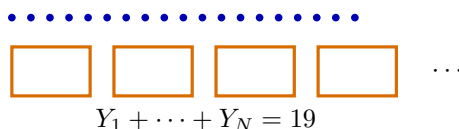
は N の 19 次程度であるから

$$0 \leq \frac{1}{N} \log {}_{N+18}C_{19} \leq \frac{19 \log(N+18)}{N} \rightarrow 0.$$

したがって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P_N = -\log 20.$$

【19 個を N 箱へ分配】



▶ 解法 2

【方針】

各目から 1 を引いた後、母関数の 19 次係数として数える。有限等比和の 19 次以下は $(1 - z)^{-N}$ と一致するため、重複組合せの添字を確実に決められる。

【解答】

(1) 各サイコロの目を X_i 、 $Y_i = X_i - 1$ とすると

$$Y_1 + \cdots + Y_N = 19, \quad 0 \leq Y_i \leq 19.$$

有利な場合の数は

$$[z^{19}](1 + z + \cdots + z^{19})^N$$

である。19 次係数までなら各因子を

$$1 + z + \cdots = \frac{1}{1 - z}$$

に替えてよいから

$$[z^{19}](1 - z)^{-N} = {}_{N+18}C_{19}.$$

したがって

$$P_N = \frac{{}_{N+18}C_{19}}{20^N}.$$

(2) ${}_{N+18}C_{19}$ は N の 19 次程度であり、

$$1 \leq {}_{N+18}C_{19} \leq (N + 18)^{19}$$

である。よって

$$0 \leq \frac{1}{N} \log {}_{N+18}C_{19} \leq \frac{19 \log(N + 18)}{N} \rightarrow 0.$$

以上から

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P_N = -\log 20.$$

【総評】 小さい和を重複組合せで数え、指数的な極限を取る問題。目安時間は 18 分前後。目から 1 を引くと和が 19 になり、上限 19 を気にしなくてよい点が数え上げの要点である。(2) では組合せ部分は多項式的にしか増えないため、 $1/N$ を掛けた対数では消える。最後に 20^{-N} の寄与だけが $-\log 20$ として残る。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。

【第 5 問】

微分可能な関数 $f(x)$ が、ある定数 $a \neq 0$ に対して $f'(x) = af(1 - x)$ を満たし、 $x = 0$ で最大値 2 をとるとする。 $g(x) = \{f(x)\}^2 + \{f(1 - x)\}^2$ とおく。

- (1) $g(x)$ は x によらない定数であることを示せ。
- (2) $g(x)$ を求めよ。
- (3) 積分

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$$

の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$g(x) = f(x)^2 + f(1-x)^2$ を微分し、条件 $f'(x) = af(1-x)$ と、 x を $1-x$ に置き換えた式 $f'(1-x) = af(x)$ を使って $g'(x) = 0$ を示す。最大値条件から $f(0) = 2$ 、さらに $f'(0) = 0$ を使って $f(1) = 0$ を得る。最後は $g(x) = 4$ を積分し、 x と $1-x$ の置換で同じ積分が 2 つ出ることを使う。

【解答】

(1) $g(x) = f(x)^2 + f(1-x)^2$ である。これを微分すると $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(1-x)f'(1-x)$ である。

条件より $f'(x) = af(1-x)$ である。また、この式の x に $1-x$ を代入すると $f'(1-x) = af(x)$ である。したがって $g'(x) = 2f(x)af(1-x) - 2f(1-x)af(x) = 0$ となる。よって $g(x)$ は x によらない定数である ことが分かる。

(2) $f(x)$ は $x = 0$ で最大値 2 をとるので $f(0) = 2$ である。また微分可能で、 $x = 0$ で最大をとるから $f'(0) = 0$ である。条件式に $x = 0$ を代入すると $f'(0) = af(1)$ であり、 $a \neq 0$ だから $f(1) = 0$ である。

(1) より $g(x)$ は定数なので $g(x) = g(0) = f(0)^2 + f(1)^2 = 2^2 + 0^2 = 4$ である。したがって $g(x) = 4$ である。

(3)

(2) より、すべての x について $f(x)^2 + f(1-x)^2 = 4$ である。これを 0 から 1 まで積分すると

$$\int_0^1 f(x)^2 dx + \int_0^1 f(1-x)^2 dx = 4$$

である。第 2 項で $u = 1-x$ と置換すると

$$\int_0^1 f(1-x)^2 dx = \int_0^1 f(u)^2 du$$

である。したがって

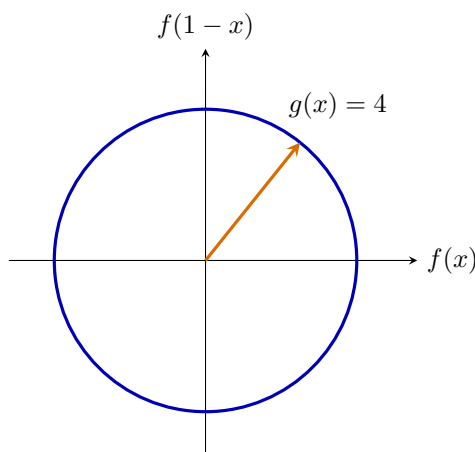
$$2 \int_0^1 f(x)^2 dx = 4$$

となるので

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = 2$$

である。

【保存される二乗和】



▶ 解法 2

【方針】

$f(1-x) = f'(x)/a$ と書き、対称な二乗和を f と f' の保存量へ変える。2 階微分方程式を介して保存を示し、端点条件と対称積分で値を決める。

【解答】

(1) 条件式をもう一度微分すると

$$f''(x) = -af'(1-x) = -a^2 f(x).$$

また

$$f(1-x) = \frac{f'(x)}{a}$$

だから

$$g(x) = f(x)^2 + \frac{f'(x)^2}{a^2}.$$

これを微分すると

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + \frac{2f'(x)f''(x)}{a^2} = 0.$$

よって g は一定である。

(2) $x = 0$ で最大値 2 を取るので

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = 0.$$

したがって

$$g(x) = g(0) = 4.$$

(3) これを 0 から 1 まで積分すると

$$\int_0^1 f(x)^2 dx + \int_0^1 f(1-x)^2 dx = 4.$$

置換 $u = 1-x$ により 2 つの積分は等しいので

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = 2.$$

【総評】 対称な微分条件から保存される量を作る問題。目安時間は 20 分前後。 $g'(x)$ の計算では、 $f(1-x)$ の微分に負号が出る点と、 $f'(1-x) = af(x)$ を使う点が重要である。最大値条件から $f'(0) = 0$ 、さらに $a \neq 0$ より $f(1) = 0$ を導く流れも採点点になる。(3) は置換で 2 つの積分が等しいことを明示すれば短くまとまる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図は本文の論証を補助するものであり、縮尺に依存せず結論が得られる。