

東北大学 1995 年度 理系 (後期)

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

空間に 3 点

$$A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \quad B(1, -1, \sqrt{2}), \quad C(-1, 1, \sqrt{2})$$

が与えられている.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を求めよ.
- (2) 3 点 A, B, C を通る平面 S の方程式を求めよ.
- (3) 原点 O を通る球面で, 平面 S による切り口が三角形 ABC の内接円となるものの方程式を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の長さとお積から角を求める. (2) は同じ 2 本のベクトルに垂直な法線を取り, 平面方程式を作る. (3) では三角形 ABC が正三角形であることから内心と内接円半径を求め, 球の中心が内心を通る平面 S の法線上にあること, さらに原点を通ることを条件にして中心と半径を決める.

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad \overrightarrow{AC} = (-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

である. 長さの 2 乗は $|\overrightarrow{AB}|^2 = (1 - \sqrt{2})^2 + (-1 - \sqrt{2})^2 + 2 = 8$ であり, 同様に $|\overrightarrow{AC}|^2 = 8$ である. また内積は

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1 - \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) + (-1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + 2 = 4$$

である. したがってなす角を α とすると $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$ であり, $\alpha = 60^\circ$ である.

(2) (1) の 2 本のベクトルに垂直なベクトルとして $(1, 1, 2)$ を取れる. 実際, $(1, 1, 2)$ と $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ の内積はいずれも 0 である. したがって平面 S の方程式は $x + y + 2z = k$ と書ける. 点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ を代入して $k = 2\sqrt{2}$ だから $x + y + 2z = 2\sqrt{2}$ である.

(3) まず三角形 ABC について確認する. (1) より $|AB| = |AC| = 2\sqrt{2}$, また $|BC| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ であるから, 三角形 ABC は正三角形である. したがって内心は重心でもあり,

$$I = \frac{A + B + C}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

である. 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形の内接円半径は $\rho = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ である.

求める球の中心を M とする. 平面 S による切り口の円の中心は, 球の中心から平面 S に下ろした垂線の足である. したがって, その切り口が三角形 ABC の内接円であるためには, 垂線の足が I でなければならない. よって M は I を通り, 平面 S に垂直な直線上にある. 法線ベクトルは $(1, 1, 2)$ なので $M = I + \lambda(1, 1, 2)$ とおける.

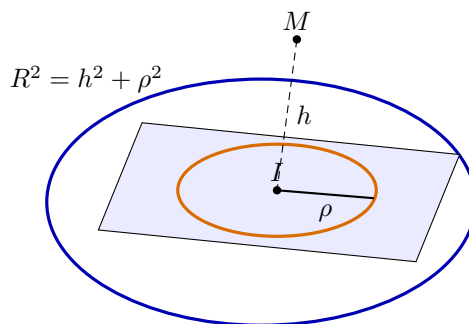
球は原点 O を通るので, 球の半径の 2 乗は $|M|^2$ である. 一方, 平面 S と球の切り口の半径は ρ であり, 中心 M から平面までの距離の 2 乗は $\lambda^2\{1^2 + 1^2 + 2^2\} = 6\lambda^2$ である. したがって $|M|^2 = \rho^2 + 6\lambda^2$ が成り立つ.

ここで $|I|^2 = \frac{4}{3}$, $I \cdot (1, 1, 2) = 2\sqrt{2}$, $\rho^2 = \frac{2}{3}$ であるから $|I + \lambda(1, 1, 2)|^2 = \frac{4}{3} + 4\sqrt{2}\lambda + 6\lambda^2$ である. これを $\frac{2}{3} + 6\lambda^2$ と等しくして $\frac{4}{3} + 4\sqrt{2}\lambda = \frac{2}{3}$ より $\lambda = -\frac{1}{6\sqrt{2}}$ である. したがって $M = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ となる. 半径の 2 乗は $|M|^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ である. よって求める球面は

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

である.

【球面と平面の切り口】



▶ 解法 2

【方針】

球面を「中心+半径」で最後に組み立てる代わりに、切り口の中心から球の中心までの符号付き距離を未知数にする。原点を通る条件を距離の三平方へ代入して一元一次方程式にする。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad \overrightarrow{AC} = (-1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

両者の長さは $2\sqrt{2}$ 、内積は 4 なので

$$\cos \angle BAC = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

よって $\angle BAC = 60^\circ$ である。

(2) $(1, 1, 2)$ は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の両方と垂直である。点 A を代入して

$$S: x + y + 2z = 2\sqrt{2}$$

を得る。

(3) 3 辺はいずれも $2\sqrt{2}$ なので、三角形 ABC は正三角形である。その内心と内接円半径は

$$I = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), \quad \rho = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

単位法線を

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$$

とし、球の中心を $M = I + h\mathbf{e}$ とおく。平面 S による切り口の半径が ρ なので、球の半径の 2 乗は $\rho^2 + h^2$ である。一方、球は原点を通るから半径の 2 乗は

$$|M|^2 = |I|^2 + 2h(I \cdot \mathbf{e}) + h^2.$$

ここで

$$|I|^2 = \frac{4}{3}, \quad I \cdot \mathbf{e} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \rho^2 = \frac{2}{3}$$

なので

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}h + h^2 = \frac{2}{3} + h^2.$$

したがって $h = -1/(2\sqrt{3})$ であり

$$M = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

さらに $|M|^2 = 3/4$ だから、球面は

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 30 分。(1)(2) は空間ベクトルの標準計算だが、(3) は切り口の円と球の中心の関係を正しく理解する必要がある。平面による球の切り口の中心は、球の中心から平面へ下ろした垂線の足であるため、球の中心は内心を通る法線上にある。この幾何条件を式に直せば解けるが、内接円半径、法線方向、原点を通る条件のどれかを落とすと答えがずれる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 2 問】

2 つの不等式 $3x^2 + y^2 \leq 3$, $y \geq x - 1$ を同時に満たす xy の平面の領域の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

楕円 $3x^2 + y^2 \leq 3$ を $X = x$, $Y = y/\sqrt{3}$ によって単位円に移す。面積倍率が $\sqrt{3}$ であることを確認し、直線 $y = x - 1$ は単位円上で中心から距離 $1/2$ の直線になる。求める領域は単位円から小さい弓形を除いた部分である。

【解答】

不等式 $3x^2 + y^2 \leq 3$ は $x^2 + \frac{y^2}{3} \leq 1$ と同値である。そこで $X = x$, $Y = \frac{y}{\sqrt{3}}$ とおくと、楕円は単位円 $X^2 + Y^2 \leq 1$ に移る。この変換では $y = \sqrt{3}Y$ であるから、面積は XY 平面での面積の $\sqrt{3}$ 倍になる。

次に直線 $y = x - 1$ は $\sqrt{3}Y = X - 1$ すなわち $X - \sqrt{3}Y = 1$ に移る。原点からこの直線までの距離は $\frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$

である。また原点は $0 \leq 1$ を満たすので、求める領域は単位円のうち原点側の大きい部分である。

単位円を、中心から距離 $1/2$ の直線で切る。小さい弓形に対応する中心角は $2\cos^{-1} \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$ である。したがってその弓形の面積は、扇形から二等辺三角形を引いて

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

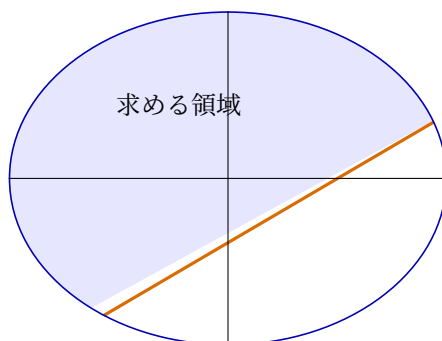
である。

よって単位円内で求める部分の面積は

$$\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。元の xy 平面での面積はこれを $\sqrt{3}$ 倍して $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3}{4}$ である。

【楕円から小さい弓形を除く】



▶ 解法 2

【方針】

楕円を円へ変換せず、 x ごとの縦の長さを直接積分する。直線と楕円の交点で区間を分け、円弧の対称性を使って標準積分へまとめる。

【解答】

直線 $y = x - 1$ と楕円の交点は

$$3x^2 + (x - 1)^2 = 3$$

より $x = -1/2, 1$ である。楕円の上端・下端は

$$y = \pm\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

だから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-1/2} 2\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} dx \\ &\quad + \int_{-1/2}^1 \left\{ \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - (x-1) \right\} dx. \end{aligned}$$

円弧の対称性を使ってまとめれば

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{3} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \sqrt{3} \int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &\quad - \int_{-1/2}^1 (x-1) dx. \end{aligned}$$

ここで

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

また $x = \sin \theta$ とおけば

$$\int_{1/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

さらに

$$- \int_{-1/2}^1 (x-1) dx = \frac{9}{8}.$$

したがって

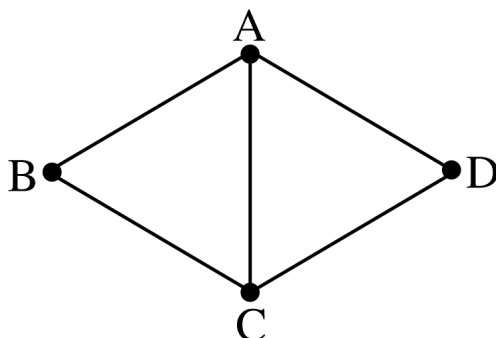
$$S = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分。楕円をそのまま積分するより、単位円に直すと図形の意味が明確になる。面積倍率 $\sqrt{3}$ を最後に掛けること、直線のどちら側を取るかを原点で判定することが重要である。弓形の面積では中心角が $2\pi/3$ になるため、扇形から三角形を引く順を丁寧に書くことと符号ミスを防げる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 3 問】

図のような 4 個の点 A, B, C, D を結んだ図形を考える. 動点 P は点 A を出発点として A, B, C, D 上を移動する. P が A または C にいるときは, 残りの 3 点にそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動し, P が B または D にいるときは A, C にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する. n 回の移動後 P が A, B, C, D にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする.



- (1) a_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n, d_n を用いて表せ.
- (2) 数列 $\{a_n + c_n\}, \{a_n - c_n\}$ のそれぞれの漸化式を導け.
- (3) a_n, c_n を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

移動規則から a_{n+1}, c_{n+1} をまず書く. 次に全確率 $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ を使い, $a_n + c_n$ と $a_n - c_n$ の 2 つに分けると一次漸化式になる. 初期値 $a_0 = 1, c_0 = 0$ からそれぞれを解き, 和と差から a_n, c_n に戻す.

【解答】

(1) 点 A にいるためには, 直前に C にいて確率 $1/3$ で移るか, 直前に B または D にいて確率 $1/2$ で移る必要がある. したがって $a_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n$ である. 同様に, 点 C にいるためには, 直前に A にいて確率 $1/3$ で移るか, 直前に B または D にいて確率 $1/2$ で移ればよいので $c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n$ である.

(2) まず 2 式を足すと $a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + c_n) + (b_n + d_n)$ である. 全確率の和は 1 なので $b_n + d_n = 1 - (a_n + c_n)$ である. よって $a_{n+1} + c_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}(a_n + c_n)$ を得る.

次に 2 式を引くと $a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}(c_n - a_n) = -\frac{1}{3}(a_n - c_n)$ である. したがって $a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n)$ である.

(3) 出発点は A なので $a_0 = 1, c_0 = 0$ である. ここで $s_n = a_n + c_n, r_n = a_n - c_n$ とおく. (2) より $s_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}s_n$ である. この漸化式の一定値 s は $s = 1 - \frac{2}{3}s$ を満たすので $s = \frac{3}{5}$ である. したがって $s_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{3}\left(s_n - \frac{3}{5}\right)$ であり, $s_0 = 1$ から $s_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ となる.

また $r_{n+1} = -\frac{1}{3}r_n, r_0 = 1$ だから $r_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ である. 和と差から $a_n = \frac{s_n + r_n}{2}, c_n = \frac{s_n - r_n}{2}$ である. よって

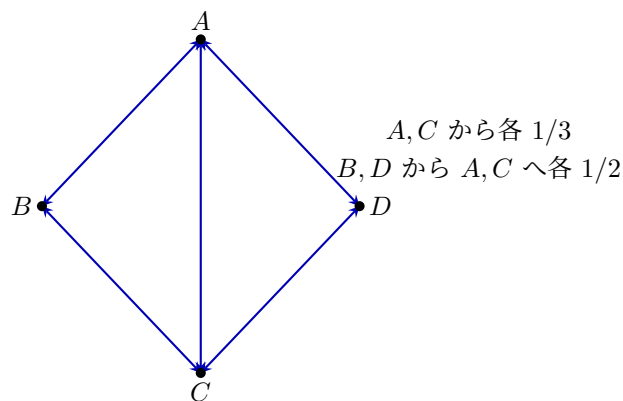
$$a_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

および

$$c_n = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

である.

【4 点間の移動】



▶ 解法 2

【方針】

4 状態の確率ベクトルを、移動のたびに一定倍される 3 つの成分へ分解する。対称な成分と A, C の差の成分を同時に追うことで、漸化式を個別に解かず a_n, c_n を直接読む。

【解答】

(1) 移動規則から

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n.$$

(2) 2 式の和と差を取り、全確率の和が 1 であることを使うと

$$a_{n+1} + c_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}(a_n + c_n),$$

$$a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n).$$

(3) $v_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)^\top$ とする。次の 3 つのベクトルは、1 回移動するとそれぞれ表示した倍率になることを成分計算で確かめられる。

$$\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right) \mapsto \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right),$$

$$(1, -1, 1, -1) \mapsto -\frac{2}{3}(1, -1, 1, -1),$$

$$(1, 0, -1, 0) \mapsto -\frac{1}{3}(1, 0, -1, 0).$$

初期ベクトルは

$$\begin{aligned} v_0 = (1, 0, 0, 0) &= \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right) \\ &\quad + \frac{1}{5}(1, -1, 1, -1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

したがって n 回後は

$$\begin{aligned} v_n &= \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right) \\ &\quad + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n (1, -1, 1, -1) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n (1, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

第 1 成分と第 3 成分を読めば

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$c_n = \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分。図の見た目に引きずられず、どの点から A と C に入れるかを確率で書き出すのが第一歩である。その後は $a_n + c_n$ と $a_n - c_n$ に分けると、対称性により 2 本の一次漸化式になる。初期値を $n = 0$ で置くと式が最も自然にまとまり、最後に和と差から戻すだけでよい。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 4 問】

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ 上の点 $T\left(t, \frac{t^2}{2} - 1\right)$ における法線を l_t とする。

- (1) l_t が点 $P(p, q)$ を通るとき、 p, q, t の満たす関係式を求めよ。
- (2) 点 $P\left(p, \frac{3}{2}\right)$ を通る法線 l_t の本数について調べよ。
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る法線 l_t がちょうど 2 本あるとき、 p と q の満たす関係式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 $T(t, t^2/2 - 1)$ における接線の傾きは t なので、法線の式を作り、点 $P(p, q)$ を通る条件を t の 3 次方程式に直す。法線の本数はこの 3 次方程式の異なる実数解の個数で判定する。(3) はちょうど 2 本になる条件を重解の存在としてとらえ、 $F(t) = 0$ と $F'(t) = 0$ から p, q の関係を消去する。

【解答】

(1) 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ の $x = t$ における接線の傾きは t である。 $t \neq 0$ のとき、法線 l_t の傾きは $-1/t$ なので、法線の式は $y - \left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -\frac{1}{t}(x - t)$ である。点 $P(p, q)$ がこの法線上にある条件は $q - \left(\frac{t^2}{2} - 1\right) = -\frac{1}{t}(p - t)$ である。両辺に t を掛けて整理すると $tq - \frac{t^3}{2} + t = -p + t$ すなわち $t^3 - 2qt - 2p = 0$ となる。 $t = 0$ のとき、接線は水平で法線は $x = 0$ である。点 $P(p, q)$ がこの法線上にある条件は $p = 0$ であり、上の式に $t = 0$ を代入しても $-2p = 0$ となる。したがって上の関係式は $t = 0$ の場合も含んでいる。

(2) $q = 3/2$ のとき、(1) の式は $t^3 - 3t - 2p = 0$ である。ここで $h(t) = t^3 - 3t$ とおくと、方程式は $h(t) = 2p$ である。 $h'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t - 1)(t + 1)$ だから、 $h(t)$ は $t = -1$ で極大、 $t = 1$ で極小をとる。値は $h(-1) = 2$, $h(1) = -2$ である。したがって水平線 $y = 2p$ との交点数を読むと、法線の本数は

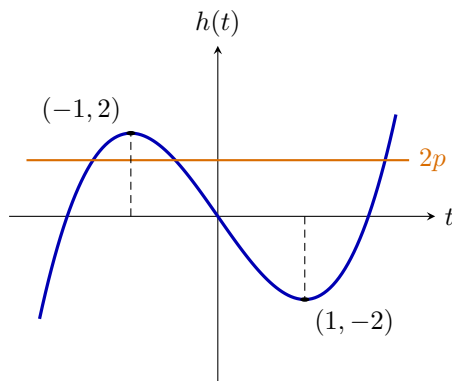
$$\begin{cases} 3\text{本} & (-1 < p < 1), \\ 2\text{本} & (p = -1, 1), \\ 1\text{本} & (p < -1, 1 < p) \end{cases}$$

である。

(3) 一般に $F(t) = t^3 - 2qt - 2p$ とおく。法線がちょうど 2 本あるとは、この 3 次方程式が異なる実数解をちょうど 2 つもつことである。3 次方程式で異なる実数解がちょうど 2 つになるのは、重解を 1 つもち、かつ 3 重解ではないときである。

重解を $t = \alpha$ とする。このとき $F(\alpha) = 0$, $F'(\alpha) = 0$ である。 $F'(t) = 3t^2 - 2q$ だから $3\alpha^2 - 2q = 0$ すなわち $q = \frac{3}{2}\alpha^2$ である。また $F(\alpha) = \alpha^3 - 2q\alpha - 2p = 0$ に代入すると $\alpha^3 - 3\alpha^3 - 2p = 0$ より $p = -\alpha^3$ である。もし $\alpha = 0$ なら $p = q = 0$ となり、 $F(t) = t^3$ で 3 重解になって法線は 1 本だけである。したがって $\alpha \neq 0$ 、特に $q > 0$ である。 $p = -\alpha^3$, $q = \frac{3}{2}\alpha^2$ から α を消去すると $p^2 = \alpha^6$, $q^3 = \frac{27}{8}\alpha^6$ である。したがって $q > 0$, $8q^3 = 27p^2$ が求める条件である。

【法線の本数が変わる三次関数】



▶ 解法 2

【方針】

3 次方程式が異なる 2 実根をもつ条件を、微分ではなく重解を含む因数分解で表す。重解を α と置くと、2 次の係数が 0 であることから残る根も直ちに決まる。

【解答】

(1) 法線方向ベクトルとして $(t, -1)$ と垂直な $(1, t)$ を用いると、法線上の点 (x, y) は

$$(x, y) = \left(t, \frac{t^2}{2} - 1 \right) + \lambda(t, -1)$$

と表せる。この直線が $P(p, q)$ を通る条件から λ を消去すると

$$t^3 - 2qt - 2p = 0$$

を得る。この式は $t = 0$ の場合も含む。

(2) $q = 3/2$ では

$$t^3 - 3t - 2p = 0.$$

$h(t) = t^3 - 3t$ は $t = -1$ で極大値 2、 $t = 1$ で極小値 -2 を取る。したがって異なる実数解の個数、すなわち法線の本数は

$$\begin{cases} 3\text{本} & (-1 < p < 1), \\ 2\text{本} & (p = \pm 1), \\ 1\text{本} & (p < -1 \text{ または } p > 1) \end{cases}$$

である。

(3) 異なる法線がちょうど 2 本なら、3 次式は重解 α と別の実根 β をもち

$$t^3 - 2qt - 2p = (t - \alpha)^2(t - \beta)$$

と書ける。左辺の t^2 の係数が 0 だから $\beta = -2\alpha$ である。よって

$$(t - \alpha)^2(t + 2\alpha) = t^3 - 3\alpha^2 t + 2\alpha^3.$$

係数比較により

$$q = \frac{3}{2}\alpha^2, \quad p = -\alpha^3.$$

$\alpha = 0$ では 3 重解になり法線は 1 本だけなので $\alpha \neq 0$ 、したがって $q > 0$ である。消去すると

$$8q^3 = 27p^2.$$

逆にこの 2 条件のもとでは $\alpha \neq 0$ を取れて上の因数分解が成立し、 α と -2α は異なる。ゆえに必要な十分条件は

$$q > 0, \quad 8q^3 = 27p^2$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 30 分。法線の本数を直接図で数えるのではなく、通過条件を t の 3 次方程式に変換するのが核心である。(2) は $t^3 - 3t$ の増減表を描けば本数が読める。(3) は「ちょうど 2 本」を「重解をもつが 3 重解ではない」と翻訳する必要がある、 $F = 0$ と $F' = 0$ の連立から $q > 0$ と $8q^3 = 27p^2$ を同時に出すのが山場である。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 5 問】

$a > 2$ とし、 $f(x) = x^2 e^{-|x-a|}$ とする。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 極限值

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a f(x) dx$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値を $x \leq a$ と $x \geq a$ に分けて外し、それぞれで微分する。 $a > 2$ により臨界点の並びが $-2, 0, a$ になることを確認し、 $x = a$ は微分不能だが左右の増減から極大と判定する。(2) は積分区間 $[-a, a]$ 全体で $x \leq a$ なので、 $f(x) = x^2 e^{x-a}$ として積分する。

【解答】

(1) $x \leq a$ では $|x-a| = a-x$ なので $f(x) = x^2 e^{x-a}$ である。したがって $f'(x) = 2x e^{x-a} + x^2 e^{x-a} = e^{x-a} x(x+2)$ である。よって $x < a$ 側では $x = -2, 0$ が増減の境目になる。

一方、 $x \geq a$ では $|x-a| = x-a$ なので $f(x) = x^2 e^{a-x}$ であり、 $f'(x) = 2x e^{a-x} - x^2 e^{a-x} = e^{a-x} x(2-x)$ である。 $a > 2$ なので、 $x > a$ では常に $x > 2$ であり、 $f'(x) < 0$ である。

増減をまとめると、 $(-\infty, -2)$ で増加、 $(-2, 0)$ で減少、 $(0, a)$ で増加、 (a, ∞) で減少する。したがって $x = -2$, $x = 0$, $x = a$ で極値をとる。値は $f(-2) = 4e^{-a-2}$, $f(0) = 0$, $f(a) = a^2$ である。左右の増減より、 $x = -2$ と $x = a$ で極大、 $x = 0$ で極小である。したがって 極大値 $4e^{-a-2}$, a^2 , 極小値 0 である。

(2) 積分区間は $-a \leq x \leq a$ であり、この範囲では常に $x \leq a$ である。したがって $f(x) = x^2 e^{x-a}$ を用いればよい。求める量は

$$\frac{1}{a^2} \int_{-a}^a x^2 e^{x-a} dx = \frac{e^{-a}}{a^2} \int_{-a}^a x^2 e^x dx$$

である。

部分積分を 2 回行くと

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$$

である。よって

$$\frac{e^{-a}}{a^2} \int_{-a}^a x^2 e^x dx = \frac{e^{-a}}{a^2} [e^x (x^2 - 2x + 2)]_{-a}^a$$

$$= \frac{e^{-a}}{a^2} \{e^a (a^2 - 2a + 2) - e^{-a} (a^2 + 2a + 2)\} = \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2} - e^{-2a} \frac{a^2 + 2a + 2}{a^2} \text{ である。ここで}$$

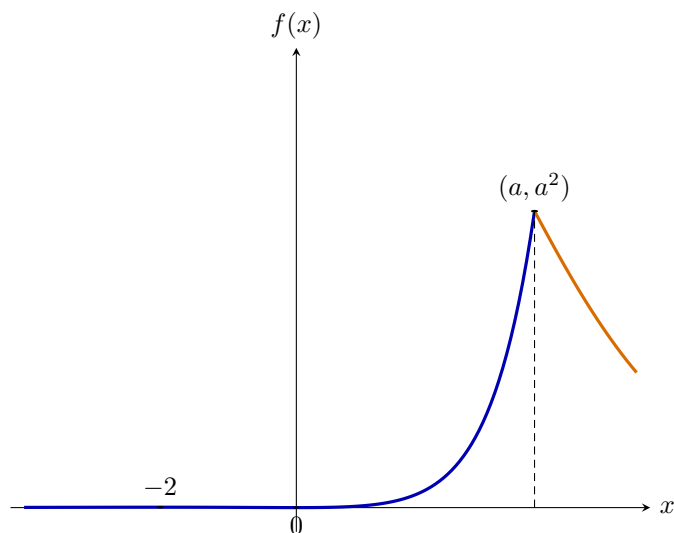
$$\frac{a^2 - 2a + 2}{a^2} \rightarrow 1, \quad e^{-2a} \frac{a^2 + 2a + 2}{a^2} \rightarrow 0 \quad (a \rightarrow +\infty)$$

だから

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a f(x) dx = 1$$

である。

【絶対値で接続された指数曲線】



▶ 解法 2

【方針】

極値は左右の対数微分で符号だけを簡潔に調べる。極限は $u = a - x$ により積分区間を移し、指数減衰する標準的な 3 つの積分へ分解して求める。

【解答】

(1) $x < a$, $x \neq 0$ では

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} + 1,$$

$x > a$ では

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x} - 1.$$

$a > 2$ を考慮すると、増減は

x	$-\infty$	-2	0	a	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

となる。したがって極大値は

$$4e^{-a-2} \quad (x = -2), \quad a^2 \quad (x = a),$$

極小値は 0 ($x = 0$) である。

(2) 積分区間では $x \leq a$ なので $f(x) = x^2 e^{x-a}$ である。 $u = a - x$ とおくと

$$\frac{1}{a^2} \int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^{2a} \left(1 - \frac{u}{a}\right)^2 e^{-u} du.$$

右辺を展開して

$$A_0 - \frac{2}{a} A_1 + \frac{1}{a^2} A_2$$

と書く。ただし

$$A_k = \int_0^{2a} u^k e^{-u} du \quad (k = 0, 1, 2)$$

である。部分積分により

$$A_0 = 1 - e^{-2a},$$

$$A_1 = 1 - (2a + 1)e^{-2a},$$

$$A_2 = 2 - (4a^2 + 4a + 2)e^{-2a}.$$

$a \rightarrow +\infty$ で $A_0 \rightarrow 1$, $A_1 \rightarrow 1$, $A_2 \rightarrow 2$ だから

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a f(x) dx = 1$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 25 分。絶対値を外す分岐点が $x = a$ で、さらに $a > 2$ のため $-2, 0, a$ の順に増減を調べられる。 $x = a$ は微分係数で判定する点ではなく、左右で増加から減少へ変わる尖った極大として扱う。(2) では積分範囲全体が $x \leq a$ に入ることが見えれば、あとは $x^2 e^x$ の積分と極限評価に集中できる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。