

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1995 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. A^2 が角 θ ($0 < \theta < \pi$) の回転を表す行列であれば, A も回転を表す行列であることを証明せよ.

第 2 問

関数 $f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x$ を考える.

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ.
- (2) (1) で求めた極大値を b とする. 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = b$ によって囲まれる図形の面積を求めよ.

第 3 問

1 から 20 までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつある。これらの 20 枚の番号札から同時に 2 枚無作為に取り出し、大きい番号を m とし、小さい番号を n とする。実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数を表すものとして、以下の問に答えよ。

- (1) $\left\lceil \log_{10} \frac{m}{n} \right\rceil = 1$ となる m, n の組をすべて求めよ。
- (2) $\log_{10} \frac{m}{n} < \left\lceil \log_{10} \frac{m}{n} \right\rceil + \log_{10} 2$ となる確率を求めよ。

第 4 問

平面 $z = x - y$ 上の 4 点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, 1, 1)$, $D(1, 0, 1)$ を頂点とする四角形（内部を含む）を x 軸のまわりに回転させてできた立体を K とする。

- (1) 平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq 2$) による K の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (2) K の体積を求めよ.

第 5 問

n を 0 または正の整数とし,

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx, \quad J_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin x dx$$

とする.

- (1) $n \geq 1$ のとき, I_n と J_{n-1} の関係式, および J_n と I_{n-1} の関係式を求めよ.
- (2) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して I_n の値を求めよ.
- (3) $n = 0, 1, 2$ に対し,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^n f(x) \cos x dx = 4\pi$$

を同時に満たす x の 2 次式 $f(x)$ を求めよ.

第 6 問

$0 < u < \frac{\pi}{4}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\frac{1}{\tan u} - \frac{1}{\tan 2u}$ を簡単にせよ.

(2) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$$

の和を求めよ. ただし,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

を用いてよい.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)