

東北大学 1995 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする. A^2 が角 θ ($0 < \theta < \pi$) の回転を表す行列であれば, A も回転を表す行列であることを証明せよ.

▶ 解法 1

【方針】

A^2 を角 θ の回転行列 R とおくと, $AA^2 = A^2A$ から $AR = RA$ が成り立つ. $0 < \theta < \pi$ なので $\sin \theta \neq 0$ であり, 成分比較で A の形を $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$ に絞る. 最後に A^2 の行列式が 1 であることから $u^2 + v^2 = 1$ を示し, 回転行列の形に直す.

【解答】

角 θ の回転行列を

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

とおく. 仮定より $A^2 = R$ である. 行列の積の結合法則から $AR = AA^2 = A^3 = A^2A = RA$ が成り立つ. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$ と書く. $0 < \theta < \pi$ より $S \neq 0$ である. $AR = RA$ を成分で書くと

$$\begin{pmatrix} aC + bS & -aS + bC \\ cC + dS & -cS + dC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ca - Sc & Cb - Sd \\ Sa + Cc & Sb + Cd \end{pmatrix}$$

である. 左上成分を比べると $aC + bS = aC - cS$ より $b = -c$ を得る. また右上成分を比べると $-aS + bC = bC - dS$ より $a = d$ を得る. したがって

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

と書ける.

次に行列式を見る. $A^2 = R$ であり, 回転行列の行列式は 1 だから $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det R = 1$ である. 一方, 上の形から $\det A = u^2 + v^2 \geq 0$ なので $u^2 + v^2 = 1$ である. よって, ある角 ϕ を用いて $u = \cos \phi$, $v = \sin \phi$ と表せる. したがって

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

となる. これは角 $-\phi$ の回転を表す行列である. ゆえに A も回転を表す行列である.

▶ 解法 2

【方針】

交換関係を使わず、 A^2 の 4 成分を回転行列と直接比較する。非自明な回転なので $\sin \theta \neq 0$ であり、これが A の対角成分と非対角成分を回転行列の形に強制する。

【解答】

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta \neq 0$ である。非対角成分から

$$b(a+d) = -\sin \theta, \quad c(a+d) = \sin \theta$$

を得る。したがって $a+d \neq 0$ かつ $c = -b$ である。対角成分が等しいことから $a^2 + bc = bc + d^2$ 、すなわち

$$(a-d)(a+d) = 0$$

である。 $a+d \neq 0$ なので $a = d$ となる。よって

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

さらに

$$1 = \det(A^2) = (\det A)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

であり、 $a^2 + b^2 \geq 0$ だから $a^2 + b^2 = 1$ である。ある実数 ϕ を用いて $a = \cos \phi$, $b = \sin \phi$ と書けば

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

これは角 $-\phi$ の回転行列である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分。抽象的に見えるが、必要なのは $AR = RA$ の成分比較と行列式だけである。 $0 < \theta < \pi$ から $\sin \theta \neq 0$ と言えるため、 $b = -c$, $a = d$ がきちんと導ける。最後に $u^2 + v^2 = 1$ を確認しないと、単なる拡大回転の形で止まってしまうので注意する。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 2 問】

関数 $f(x) = e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x$ を考える。

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) (1) で求めた極大値を b とする。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = b$ によって囲まれる図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$u = e^x$ と置いて $u > 0$ の 3 次式 $u(u-3)^2$ として扱う。極値は df/du と $du/dx > 0$ から判定する。(2) では極大値 $b = 4$ と曲線の交点を u で求め、 $dx = du/u$ により面積積分を 1 変数の有理式と多項式の積分に直す。

【解答】

(1) $u = e^x$ とおくと $u > 0$ であり、 $f(x) = e^x(e^x - 3)^2 = u(u-3)^2$ である。 u で微分すると $\frac{d}{du}\{u(u-3)^2\} = (u-3)^2 + 2u(u-3) = (u-3)(3u-3) = 3(u-1)(u-3)$ である。また $du/dx = e^x = u > 0$ だから $f'(x) = 3u(u-1)(u-3)$ である。

したがって、 $0 < u < 1$ で $f'(x) > 0$, $1 < u < 3$ で $f'(x) < 0$, $3 < u$ で $f'(x) > 0$ となる。すなわち $u = 1$, $u = 3$ に対応する $x = 0$, $x = \log 3$ で極値をとる。値は $f(0) = 1 \cdot (1-3)^2 = 4$, $f(\log 3) = 3(3-3)^2 = 0$ である。よって極大値 4 ($x = 0$), 極小値 0 ($x = \log 3$) である。

(2) (1) より $b = 4$ である。直線 $y = 4$ と曲線の交点は $u(u-3)^2 = 4$ で決まる。左辺を移項して $u^3 - 6u^2 + 9u - 4 = 0$ であり、これは $(u-1)^2(u-4) = 0$ と因数分解できる。 $u = 1$ は極大点で接している点、 $u = 4$ はもう一方の交点である。したがって囲まれる部分は $x = 0$ から $x = \log 4$ までで、その面積は

$$\int_0^{\log 4} \{4 - f(x)\} dx$$

である。 $u = e^x$ とすると $dx = du/u$ であり、積分範囲は $u = 1$ から $u = 4$ になる。よって面積は

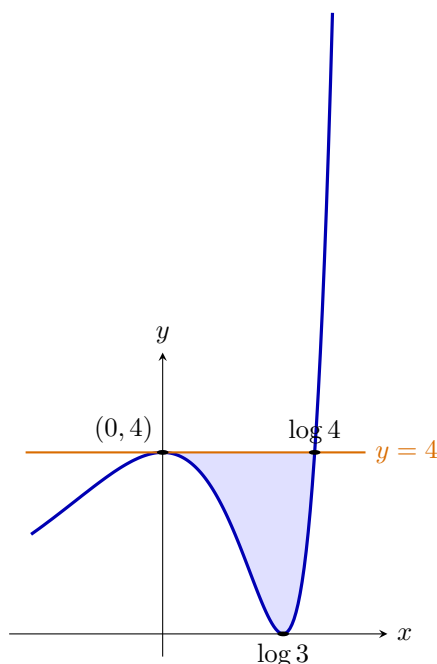
$$\int_1^4 \left\{ \frac{4}{u} - (u-3)^2 \right\} du$$

である。ここで

$$\int_1^4 (u-3)^2 du = \int_1^4 (u^2 - 6u + 9) du = 3$$

だから、求める面積は $4\log 4 - 3$ である。

【極大値の直線と囲まれる領域】



▶ 解法 2

【方針】

置換をせず、 x のまま微分・積分する。指数関数の正値を利用して増減を決め、面積は e^x, e^{2x}, e^{3x} の原始関数を直接代入して求める。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 3e^{3x} - 12e^{2x} + 9e^x = 3e^x(e^x - 1)(e^x - 3).$$

$e^x > 0$ だから、 $x < 0$ で増加、 $0 < x < \log 3$ で減少、 $x > \log 3$ で増加する。したがって

$$\text{極大値 } 4 \ (x = 0), \quad \text{極小値 } 0 \ (x = \log 3)$$

である。

(2) 直線 $y = 4$ との交点は

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 9e^x - 4 = 0.$$

$u = e^x$ と見て因数分解だけ行くと

$$(e^x - 1)^2(e^x - 4) = 0$$

なので、囲まれる区間は $0 \leq x \leq \log 4$ である。面積を S とすれば

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\log 4} (4 - e^{3x} + 6e^{2x} - 9e^x) dx \\ &= \left[4x - \frac{1}{3}e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x \right]_0^{\log 4} \\ &= 4\log 4 - 3. \end{aligned}$$

よって求める面積は $4\log 4 - 3$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 20 分。指数関数のまま微分・積分すると式が膨らむため、 $u = e^x$ と置いて $u(u-3)^2$ に直すのが決定的である。(2) では $u = 1$ が接点で重解になることを確認すると、囲まれる区間が $[0, \log 4]$ だと分かる。面積積分では $dx = du/u$ を忘れると答えが変わるので、置換後の integrand を丁寧に書く必要がある。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 3 問】

1 から 20 までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつある。これらの 20 枚の番号札から同時に 2 枚無作為に取り出し、大きい番号を m とし、小さい番号を n とする。実数 a に対して $[a]$ は a を超えない最大の整数を表すものとして、以下の問に答えよ。

- (1) $\left\lceil \log_{10} \frac{m}{n} \right\rceil = 1$ となる m, n の組をすべて求めよ。
- (2) $\log_{10} \frac{m}{n} < \left\lceil \log_{10} \frac{m}{n} \right\rceil + \log_{10} 2$ となる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

床関数の条件を m/n の範囲に戻して数える。 $1 < m/n \leq 20$ なので $\lfloor \log_{10}(m/n) \rfloor$ は 0 または 1 だけである。(2) ではそれぞれの場合に $m/n < 2$, $10 \leq m/n < 20$ という範囲へ直し、端点 $m/n = 20$ が除かれることに注意して組数を数える。

【解答】

(1) $\left\lceil \log_{10} \frac{m}{n} \right\rceil = 1$ であることは $1 \leq \log_{10} \frac{m}{n} < 2$ と同値であり、したがって $10 \leq \frac{m}{n} < 100$ である。いま $1 \leq n < m \leq 20$ なので、実際には $10n \leq m \leq 20$ を満たす組を探せばよい。 $n = 1$ のときは $m = 10, 11, \dots, 20$ が可能である。 $n = 2$ のときは $m = 20$ のみが可能である。 $n \geq 3$ では $10n > 20$ となり不可能である。よって求める組は $(n, m) = (1, 10), (1, 11), \dots, (1, 20), (2, 20)$ である。

(2) $1 < m/n \leq 20$ であるから、 $\lfloor \log_{10}(m/n) \rfloor$ は 0 または 1 である。

まず $0 \leq \log_{10} \frac{m}{n} < 1$ すなわち $1 < m/n < 10$ の場合を考える。このとき条件は $\log_{10} \frac{m}{n} < \log_{10} 2$ であるから $1 < \frac{m}{n} < 2$ となる。この組数を数える。 $m < 2n$, $m > n$, $m \leq 20$ であるから、 $1 \leq n \leq 10$ では $n-1$ 通り、 $11 \leq n \leq 20$ では $20-n$ 通りである。したがって

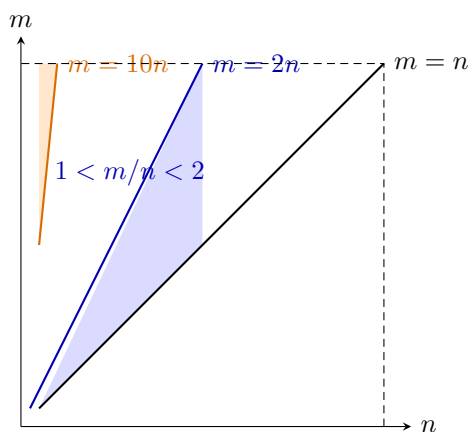
$$\sum_{n=1}^{10} (n-1) + \sum_{n=11}^{20} (20-n) = 45 + 45 = 90$$

通りである。

次に $1 \leq \log_{10} \frac{m}{n} < 2$ の場合、つまり $10 \leq m/n < 100$ の場合を考える。このとき条件は $\log_{10} \frac{m}{n} < 1 + \log_{10} 2 = \log_{10} 20$ であるから $10 \leq \frac{m}{n} < 20$ となる。 $n = 1$ では $m = 10, 11, \dots, 19$ の 10 通り、 $n = 2$ では $m = 20$ の 1 通りであり、合計 11 通りである。 $(1, 20)$ は $m/n = 20$ なので、ここでは除かれる。

よって条件を満たす組は $90 + 11 = 101$ 通りである。全体の取り出し方は ${}_{20}C_2 = 190$ 通りで等確率だから、求める確率は $\frac{101}{190}$ である。

【番号対 (n, m) の数え上げ】



► 解法 2

【方針】

小さい番号 n を固定し、条件を満たす大きい番号 m の個数を表にして数える。比が 2 未満の部分と 10 以上 20 未満の部分を、端点の含み方まで分けて集計する。

【解答】

(1)

$$\left[\log_{10} \frac{m}{n} \right] = 1 \iff 10 \leq \frac{m}{n} < 100.$$

$m \leq 20$ より $n = 1, 2$ だけを調べればよい。 $n = 1$ では $m = 10, 11, \dots, 20$ 、 $n = 2$ では $m = 20$ である。

(2) 条件を比へ戻すと、可能なのは

$$1 < \frac{m}{n} < 2 \quad \text{または} \quad 10 \leq \frac{m}{n} < 20$$

である。前者について n を固定した個数は

n	m の範囲	個数
$1 \leq n \leq 10$	$n + 1 \leq m \leq 2n - 1$	$n - 1$
$11 \leq n \leq 20$	$n + 1 \leq m \leq 20$	$20 - n$

だから

$$\sum_{n=1}^{10} (n - 1) + \sum_{n=11}^{20} (20 - n) = 45 + 45 = 90.$$

後者は $n = 1$, $m = 10, \dots, 19$ の 10 組と $n = 2$, $m = 20$ の 1 組で、合計 11 組である。したがって有利な組は 101 組、全体は

$${}_{20}C_2 = 190$$

組なので、求める確率は

$$\frac{101}{190}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 20 分。床関数を見たら、まず不等式の範囲に戻すのが基本である。本問では m/n の最大値が 20 なので、整数部分は 0 か 1 に限られる。(2) では $m/n = 2$ は第 1 の場合に含まれず、 $m/n = 20$ も第 2 の場合に含まれない。端点の不等号を丁寧に扱い、組数を表で整理すると数え落としを防げる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 4 問】

平面 $z = x - y$ 上の 4 点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(2, 1, 1)$, $D(1, 0, 1)$ を頂点とする四角形（内部を含む）を x 軸のまわりに回転させてできた立体を K とする。

- (1) 平面 $x = t$ ($0 \leq t \leq 2$) による K の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ.
- (2) K の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

四角形を $(x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ ($0 \leq \alpha, \beta \leq 1$) とパラメータ表示する。平面 $x = t$ で切ると $y + z = t$ 上の線分になり、 $0 \leq t \leq 1$ と $1 \leq t \leq 2$ で端点が変わる。回転後の切り口は、その線分上の $y^2 + z^2$ の最大値と最小値からできる円環である。

【解答】

四角形 $ABCD$ は

$$A + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AD} \quad (0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1)$$

で表せる。ここで $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 1)$ なので、四角形上の点は $(x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha, \beta)$ と書ける。したがって平面 $x = t$ による切り口は $\alpha + \beta = t$, $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ を満たす線分である。

(1) まず $0 \leq t \leq 1$ のとき、 α は $0 \leq \alpha \leq t$ を動き、 $\beta = t - \alpha$ である。すなわち yz 平面では $y + z = t$, $0 \leq y, z$ 上の線分になる。 x 軸のまわりに回転させると、半径の 2 乗は $r^2 = y^2 + z^2 = y^2 + (t - y)^2$ である。この値は $y = t/2$ で最小となり $r_{\min}^2 = \frac{t^2}{2}$ 端点 $y = 0, t$ で最大となり $r_{\max}^2 = t^2$ である。したがって切り口の面積は円環の面積として $S(t) = \pi(r_{\max}^2 - r_{\min}^2) = \frac{\pi t^2}{2}$ である。

次に $1 \leq t \leq 2$ のとき、 α は $t - 1 \leq \alpha \leq 1$ を動く。つまり $y + z = t$, $t - 1 \leq y \leq 1$ である。このときも $r^2 = y^2 + (t - y)^2$ であり、最小値は $y = t/2$ で $r_{\min}^2 = \frac{t^2}{2}$ である。また最大値は端点でとり、 $r_{\max}^2 = 1^2 + (t - 1)^2$ である。したがって

$$S(t) = \pi \left\{ 1 + (t - 1)^2 - \frac{t^2}{2} \right\} \quad (1 \leq t \leq 2)$$

となる。

(2) 体積は切り口の面積を t で積分して

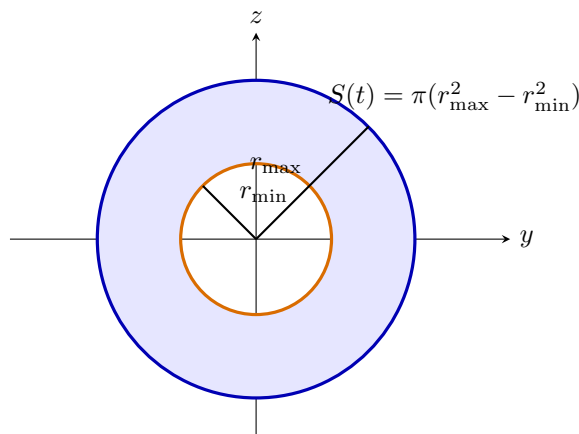
$$V = \int_0^1 \frac{\pi t^2}{2} dt + \int_1^2 \pi \left\{ 1 + (t - 1)^2 - \frac{t^2}{2} \right\} dt$$

である。第 1 項は $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}$ であり、第 2 項は

$$\pi \int_1^2 \left(2 - 2t + \frac{t^2}{2} \right) dt = \pi \left[2t - t^2 + \frac{t^3}{6} \right]_1^2 = \frac{\pi}{6}$$

である。よって $V = \frac{\pi}{3}$ である。

【 $x = t$ の切り口にできる円環】



▶ 解法 2

【方針】

回転後の立体を、 x 軸からの距離 r が一定の薄い円筒殻に分ける。各半径で許される x の長さを求め、円筒殻の体積を r について積分する。

【解答】

(1) 元の四角形は

$$(x, y, z) = (\alpha + \beta, \alpha, \beta), \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1$$

である。 $x = t$ で切ると $y + z = t$ となる。半径の 2 乗 $r^2 = y^2 + z^2$ の最小値は $y = z = t/2$ で $t^2/2$ である。最大値は端点で取り、

$$r_{\max}^2 = \begin{cases} t^2 & (0 \leq t \leq 1), \\ 1 + (t-1)^2 & (1 \leq t \leq 2) \end{cases}$$

となる。よって

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\pi t^2}{2} & (0 \leq t \leq 1), \\ \pi \left\{ 1 + (t-1)^2 - \frac{t^2}{2} \right\} & (1 \leq t \leq 2). \end{cases}$$

(2) ここでは別の数え方をする。元の四角形上では

$$x = y + z, \quad 0 \leq y, z \leq 1.$$

半径 $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ を固定して第 1 象限の円弧を動かすと、対応する $x = y + z$ の範囲は

$$\begin{cases} r \leq x \leq \sqrt{2}r & (0 \leq r \leq 1), \\ 1 + \sqrt{r^2 - 1} \leq x \leq \sqrt{2}r & (1 \leq r \leq \sqrt{2}). \end{cases}$$

したがって円筒殻の周長 $2\pi r$ と x 方向の長さを掛けて

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 r(\sqrt{2}r - r) dr \\ &\quad + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} r(\sqrt{2}r - 1 - \sqrt{r^2 - 1}) dr. \end{aligned}$$

第 1 項は

$$\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)$$

である。また第 2 項は

$$2\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{3}r^3 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{3}(r^2 - 1)^{3/2} \right]_1^{\sqrt{2}} = \pi - \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

両者を足して

$$V = \frac{\pi}{3}$$

を得る。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 25 分。平面 $x = t$ で切ったときの線分を正しく把握できるかが勝負である。回転後の断面は単なる円ではなく、線分上の原点からの距離に最小値と最大値があるため円環になる。 $t = 1$ を境に線分の端点が変わること、内半径 $t/\sqrt{2}$ を落とさないことが主なミスの原因である。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 5 問】

n を 0 または正の整数とし、

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx, \quad J_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin x dx$$

とする。

- (1) $n \geq 1$ のとき、 I_n と J_{n-1} の関係式、および J_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。
- (2) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して I_n の値を求めよ。
- (3) $n = 0, 1, 2$ に対し、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^n f(x) \cos x dx = 4\pi$$

を同時に満たす x の 2 次式 $f(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は部分積分で I_n と J_{n-1} 、 J_n と I_{n-1} を結ぶ。端点 $\pm\pi$ での $\sin x$ 、 $\cos x$ の値が符号を決める。(2) では得た漸化式を順に使い、奇偶性も確認する。(3) は $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおき、 I_0 から I_4 までを代入して係数を決める。

【解答】

(1) $n \geq 1$ とする。まず

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \cos x dx$$

で部分積分を行う。 $u = x^n$ 、 $dv = \cos x dx$ とすると

$$I_n = [x^n \sin x]_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-1} \sin x dx$$

である。端点で $\sin \pi = \sin(-\pi) = 0$ だから $I_n = -nJ_{n-1}$ である。

次に

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} x^n \sin x dx$$

で部分積分を行う。 $u = x^n$ 、 $dv = \sin x dx$ とすると

$$J_n = [-x^n \cos x]_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} x^{n-1} \cos x dx$$

である。境界項は

$$[-x^n \cos x]_{-\pi}^{\pi} = \pi^n - (-\pi)^n = \{1 - (-1)^n\} \pi^n$$

なので $J_n = \{1 - (-1)^n\} \pi^n + nI_{n-1}$ である。

(2) 順に求める。まず

$$I_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = 0$$

である。また $I_1 = -J_0$ で、

$$J_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$$

より $I_1 = 0$ である。次に $J_1 = \{1 - (-1)\} \pi + I_0 = 2\pi$ だから $I_2 = -2J_1 = -4\pi$ である。さらに $J_2 = \{1 - 1\} \pi^2 + 2I_1 = 0$ より $I_3 = -3J_2 = 0$ である。最後に $J_3 = \{1 - (-1)^3\} \pi^3 + 3I_2 = 2\pi^3 - 12\pi$ だから $I_4 = -4J_3 = -8\pi^3 + 48\pi$ である。したがって

$$I_0 = 0, \quad I_1 = 0, \quad I_2 = -4\pi, \quad I_3 = 0, \quad I_4 = -8\pi^3 + 48\pi$$

である。

(3) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおく。条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^n f(x) \cos x \, dx = 4\pi \quad (n = 0, 1, 2)$$

を I_k で書くと $AI_2 + BI_1 + CI_0 = 4\pi$, $AI_3 + BI_2 + CI_1 = 4\pi$, $AI_4 + BI_3 + CI_2 = 4\pi$ である。(2) の値を代入すると, 1 本目から $-4\pi A = 4\pi$ より $A = -1$ である。2 本目から $-4\pi B = 4\pi$ より $B = -1$ である。3 本目から $(-1)(-8\pi^3 + 48\pi) + C(-4\pi) = 4\pi$ だから $8\pi^3 - 48\pi - 4\pi C = 4\pi$ であり, $C = 2\pi^2 - 13$ を得る。よって $f(x) = -x^2 - x + 2\pi^2 - 13$ である。

▶ 解法 2

【方針】

積分する関数の奇偶性を先に使い、必要な積分だけを偶数添字の漸化式で求める。最後は $f(x)$ の偶数部分・奇数部分が別々の条件で決まることを利用する。

【解答】

(1) 部分積分により

$$I_n = -nJ_{n-1}, \quad J_n = \{1 - (-1)^n\}\pi^n + nI_{n-1}$$

である。

(2) $x^n \cos x$ は n が奇数なら奇関数なので

$$I_1 = I_3 = 0.$$

また $I_0 = 0$ である。偶数 $n = 2k$ について (1) の 2 式をつなぐと

$$I_{2k} = -4k\pi^{2k-1} - 2k(2k-1)I_{2k-2}.$$

よって

$$I_2 = -4\pi, \quad I_4 = -8\pi^3 - 12I_2 = -8\pi^3 + 48\pi.$$

以上から

$$I_0 = I_1 = I_3 = 0, \quad I_2 = -4\pi, \quad I_4 = -8\pi^3 + 48\pi.$$

(3) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とする。 $n = 0, 1, 2$ の条件は

$$AI_2 + BI_1 + CI_0 = 4\pi,$$

$$AI_3 + BI_2 + CI_1 = 4\pi,$$

$$AI_4 + BI_3 + CI_2 = 4\pi.$$

奇偶性によって第 1 式は A だけ、第 2 式は B だけを含む。したがって $A = -1$, $B = -1$ である。第 3 式へ代入すると

$$-(-8\pi^3 + 48\pi) - 4\pi C = 4\pi$$

より $C = 2\pi^2 - 13$ となる。ゆえに

$$f(x) = -x^2 - x + 2\pi^2 - 13$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 25 分。部分積分そのものは標準的だが、境界項の符号でミスが出やすい。 J_n の式では $\pi^n - (-\pi)^n$ が出るため、 n の偶奇を意識することが重要である。(3) は係数比較に見えるが、実際には I_0 から I_4 までを正確に用いる連立計算であり、途中の $I_2 = -4\pi$ を誤ると全体が崩れる。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。

【第 6 問】

$0 < u < \frac{\pi}{4}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする.

- (1) $\frac{1}{\tan u} - \frac{1}{\tan 2u}$ を簡単にせよ.
 (2) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$$

の和を求めよ. ただし,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

を用いてよい.

▶ 解法 1

【方針】

(1) で $\cot u - \cot 2u$ を計算し, 続いて $\tan u = \cot u - 2 \cot 2u$ という差の形を作る. (2) では $u = \theta/2^n$ を代入して $2^{-n} \tan(\theta/2^n)$ を隣り合う 2 項の差にし, 部分和を望遠和としてから極限 $x \cot x \rightarrow 1$ を用いる.

【解答】

(1) $\frac{1}{\tan u} - \frac{1}{\tan 2u} = \cot u - \cot 2u$ である. これを正弦・余弦で計算すると

$$\cot u - \cot 2u = \frac{\cos u}{\sin u} - \frac{\cos 2u}{\sin 2u} = \frac{\cos u \sin 2u - \sin u \cos 2u}{\sin u \sin 2u}$$

である. 分子は $\cos u \sin 2u - \sin u \cos 2u = \sin(2u - u) = \sin u$ なので $\frac{1}{\tan u} - \frac{1}{\tan 2u} = \frac{1}{\sin 2u}$ である.

(2) まず $\cot u - 2 \cot 2u = \tan u$ を確認する. 実際, $\cot 2u = \frac{\cot^2 u - 1}{2 \cot u}$ であるから

$$\cot u - 2 \cot 2u = \cot u - \frac{\cot^2 u - 1}{\cot u} = \frac{1}{\cot u} = \tan u$$

である.

ここで $u = \theta/2^n$ とすると

$$\tan \frac{\theta}{2^n} = \cot \frac{\theta}{2^n} - 2 \cot \frac{\theta}{2^{n-1}}$$

である. 両辺に 2^{-n} を掛けて

$$\frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\theta}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{\theta}{2^{n-1}}$$

となる.

したがって第 N 項までの部分和は望遠和となり,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} - \cot \theta$$

である. $x = \theta/2^N$ とおくと

$$\frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} = \frac{x}{\theta} \cot x = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{x}{\tan x}$$

である. 問題文の極限 $\tan x/x \rightarrow 1$ より $x/\tan x \rightarrow 1$ だから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} = \frac{1}{\theta}$$

である. よって求める和は $\frac{1}{\theta} - \cot \theta$ である.

【望遠和で消える隣接項】

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 2^{-1} \tan(\theta/2) & 2^{-2} \tan(\theta/2^2) & & & \\
 & & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \xrightarrow{\hspace{1.5cm}} & \\
 \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
 \cot \theta & & 2^{-1} \cot(\theta/2) & 2^{-2} \cot(\theta/2^2) & & & 2^{-N} \cot(\theta/2^N)
 \end{array}$$

▶ 解法 2

【方針】

倍角公式を繰り返して、有限個の余弦の積を正弦の比で表す。その有限恒等式の対数を微分すると、求める部分和が一度に現れる。

【解答】

(1)

$$\frac{1}{\tan u} - \frac{1}{\tan 2u} = \frac{\cos u \sin 2u - \sin u \cos 2u}{\sin u \sin 2u} = \frac{1}{\sin 2u}.$$

(2) 倍角公式を N 回繰り返すと

$$\sin \theta = 2^N \sin \frac{\theta}{2^N} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2^2} \cdots \cos \frac{\theta}{2^N}.$$

$0 < \theta < \pi/2$ では各因子が正なので、両辺の対数を θ で微分できる。すると

$$\cot \theta = \frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}.$$

よって部分和は

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n} = \frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} - \cot \theta.$$

$x = \theta/2^N$ とすれば

$$\frac{1}{2^N} \cot \frac{\theta}{2^N} = \frac{1}{\theta} \frac{x}{\tan x} \rightarrow \frac{1}{\theta}.$$

したがって求める和は

$$\frac{1}{\theta} - \cot \theta$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分。(1) の式をそのまま終えるのではなく、(2) の望遠和に使える $\tan u = \cot u - 2 \cot 2u$ へ変形する発想が核心である。部分和を書き出すと中間項が消える構造が見える。最後の極限では 2^{-N} と $\theta/2^N$ を結びつけ、 $x \cot x = x/\tan x$ と直すと自然に収束値が出る。2 解法の結論を照合し、端点・符号・定義域・必要十分性を再確認した。図を含む場合は本文との対応と縮尺に依存しない論証も確認している。