

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1997 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

空間内の点 $A(1, 1, 0)$ と $B(-1, -2, 1)$ を通る直線を l とする. P が l 上を動くとき, P と x 軸の距離の最小値 d を求めよ.

第 2 問

次の等式を満たす連続な関数 $f(x)$ について考える.

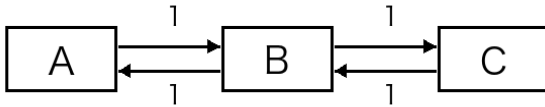
$$\int_0^x \{f(t) - t + 1\} dt = \int_{-1}^1 (x - t)^3 f(t) dt + \frac{2}{25}$$

(1) $f(x)$ は x の 2 次式であることを示せ.

(2) $f(x)$ を求めよ.

第 3 問

A , B , C の 3 室に 3 人ずつの人がいるとする. 翌日の朝くじ引きにより, A 室からは 1 人を B 室へ, B 室からは 1 人を A 室へ, 1 人を C 室へ, C 室からは 1 人を B 室へ, いっせいに移動させることにする.



この移動を毎朝繰り返した場合, 最初の日に A 室にいた 3 人が, 3 日後の移動 (3 回目の移動) の結果 1 人も A 室にいなくなる確率を求めよ.

第 4 問

(1) すべての自然数 n に対して，不等式 $3^n > n^2$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく．このとき，

$$\frac{2}{3}S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = -\frac{n}{3^{n+1}}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ．

第 5 問

曲線 $y = x^2$ ($-2 \leq x \leq 1$) 上の相異なる 3 点を $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$, $R(c, c^2)$ ($-2 \leq a < b < c \leq 1$) とする. このとき

- (1) 三角形 PQR の面積 S を a, b, c で表せ.
- (2) a, b, c を上の条件の下で動かすとき, S の最大値を求めよ.

第 6 問

関数 $y = x - \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$) を考える.

- (1) この関数の最小値と，グラフと座標軸との交点を求め， $y = x - \sqrt{x+2}$ のグラフの概形をかけ.
- (2) この関数のグラフと，直線 $x = -2$ ，および x 軸で囲まれた図形を， x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)