

東北大学 1997 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

空間内の点 $A(1, 1, 0)$ と $B(-1, -2, 1)$ を通る直線を l とする. P が l 上を動くとき, P と x 軸の距離の最小値 d を求めよ.

▶ 解法 1

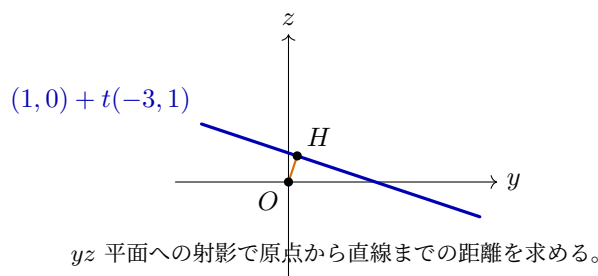
【方針】

直線 l 上の点 P を媒介変数で表す. x 軸までの距離は、点 (x, y, z) に対して $\sqrt{y^2 + z^2}$ であるから、その 2 乗 $y^2 + z^2$ を 2 次式として最小化する. 平方完成により最小値を求める.

【解答】

直線 l は点 $A(1, 1, 0)$ と点 $B(-1, -2, 1)$ を通る. 方向ベクトルは $\overrightarrow{AB} = (-2, -3, 1)$ であるから、 l 上の点 P は実数 t を用いて $P = (1, 1, 0) + t(-2, -3, 1) = (1 - 2t, 1 - 3t, t)$ と表せる.

点 (x, y, z) から x 軸までの距離は $\sqrt{y^2 + z^2}$ である. したがって距離の 2 乗は $(1 - 3t)^2 + t^2$ である. 平方完成すると $(1 - 3t)^2 + t^2 = 10 \left(t - \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{1}{10}$ である. よって距離の 2 乗の最小値は $\frac{1}{10}$ であり、求める最小距離は $d = \frac{1}{\sqrt{10}}$ である. なお、このとき $t = \frac{3}{10}$ であり、対応する点は $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right)$ である.



▶ 解法 2

【方針】

直線を yz 平面へ正射影する. 射影点は直線 $y + 3z = 1$ 上を動くので、元の点から x 軸までの最小距離は、原点からこの平面直線までの距離として求められる.

【解答】

直線 AB 上の点は

$$P = (1, 1, 0) + t(-2, -3, 1) = (1 - 2t, 1 - 3t, t)$$

と表される. 点 P から x 軸までの距離は

$$\sqrt{(1 - 3t)^2 + t^2}$$

であり、これは P の yz 平面への射影

$$(y, z) = (1 - 3t, t)$$

と原点との距離に等しい.

射影点は直線

$$y + 3z = 1$$

上を動く. 従って原点からこの直線までの距離公式により

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

垂線の足は

$$(y, z) = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10} \right)$$

であり、 $t = 3/10$ に対応する。よってこの最小値は実際に達成される。

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 10 分。空間直線の問題だが、 x 軸までの距離は y, z 成分だけで決まるため、1 変数 2 次式の最小化に落ちる。距離そのものではなく距離の 2 乗を扱えば平方根を避けられる。別解のように、 yz 平面への射影として見ると、なぜ x 座標が計算に出てこないかも明確になる。

【第 2 問】

次の等式を満たす連続な関数 $f(x)$ について考える。

$$\int_0^x \{f(t) - t + 1\} dt = \int_{-1}^1 (x-t)^3 f(t) dt + \frac{2}{25}$$

- (1) $f(x)$ は x の 2 次式であることを示せ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

両辺を x で微分すると、右辺は x について高々 2 次式になる。したがって $f(x)$ も高々 2 次式である。そこで $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおき、

$$\int_{-1}^1 f(t) dt$$

,

$$\int_{-1}^1 t f(t) dt$$

,

$$\int_{-1}^1 t^2 f(t) dt$$

を使って微分後の等式の係数を比較する。最後に元の等式の定数分も確認する。

【解答】

(1) 与えられた等式の両辺を x で微分する。左辺は

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \{f(t) - t + 1\} dt = f(x) - x + 1$$

である。右辺は

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 (x-t)^3 f(t) dt = 3 \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt$$

である。したがって

$$f(x) - x + 1 = 3 \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt$$

を得る。

右辺は

$$3 \int_{-1}^1 (x^2 - 2xt + t^2) f(t) dt$$

であり、 x について高々 2 次式である。よって $f(x) - x + 1$ も高々 2 次式であり、 $f(x)$ は x の 2 次式である。

(2) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ とおく。さらに

$$I_0 = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad I_1 = \int_{-1}^1 t f(t) dt, \quad I_2 = \int_{-1}^1 t^2 f(t) dt$$

とおく。奇関数の積分が 0 になることを用いると

$$I_0 = \frac{2A}{3} + 2C, \quad I_1 = \frac{2B}{3}, \quad I_2 = \frac{2A}{5} + \frac{2C}{3}$$

である。

微分後の等式は $Ax^2+Bx+C-x+1=3(x^2I_0-2xI_1+I_2)$ である。係数を比較して $A=3I_0$, $B-1=-6I_1$, $C+1=3I_2$ を得る。これに上の I_0, I_1, I_2 を代入すると $A=2A+6C$, $B-1=-4B$, $C+1=\frac{6A}{5}+2C$ である。したがって $C=-\frac{A}{6}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=1-\frac{6A}{5}$ である。 $C=-\frac{A}{6}$ と $C=1-\frac{6A}{5}$ を合わせると $-\frac{A}{6}=1-\frac{6A}{5}$ であり、これを解いて $A=\frac{30}{31}$, $C=-\frac{5}{31}$ を得る。よって $f(x)=\frac{30}{31}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{5}{31}$ である。

最後に、微分で定数分を失っていないことを確認する。 $x=0$ を元の等式に代入すると左辺は 0 である。右辺は

$$\int_{-1}^1 (-t)^3 f(t) dt + \frac{2}{25} = -\int_{-1}^1 t^3 f(t) dt + \frac{2}{25}$$

である。ここで

$$\int_{-1}^1 t^3 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$$

なので右辺も 0 である。したがって元の等式も満たしている。

▶ 解法 2

【方針】

右辺が x の 3 次式であることから、左辺の積分を一つの関数と見て f が 2 次式だと先に確定する。その後、微分後の恒等式へ一般の 2 次式を代入して係数を決め、元の式の定数項も確認する。

【解答】

(1)

$$F(x) = \int_0^x \{f(t) - t + 1\} dt$$

とおく。与式の右辺を x について展開すれば 3 次式なので、 $F(x)$ は 3 次以下の多項式である。従って

$$f(x) = F'(x) + x - 1$$

は 2 次以下の多項式である。

(2)

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

とおき、

$$I_j = \int_{-1}^1 t^j f(t) dt \quad (j=0, 1, 2)$$

とする。元の式を微分すると

$$f(x) - x + 1 = 3 \int_{-1}^1 (x-t)^2 f(t) dt = 3I_0 x^2 - 6I_1 x + 3I_2.$$

奇関数の対称積分が 0 であることから

$$I_0 = \frac{2A}{3} + 2C, \quad I_1 = \frac{2B}{3}, \quad I_2 = \frac{2A}{5} + \frac{2C}{3}.$$

係数比較すると

$$A = 3I_0, \quad B - 1 = -6I_1, \quad C + 1 = 3I_2.$$

すなわち

$$A = 2A + 6C, \quad B - 1 = -4B, \quad C + 1 = \frac{6A}{5} + 2C.$$

これを解いて

$$A = \frac{30}{31}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{5}{31}.$$

従って

$$f(x) = \frac{30}{31}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{5}{31}.$$

最後に $x = 0$ を元の式へ代入する。上の f では

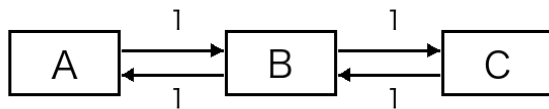
$$\int_{-1}^1 t^3 f(t) dt = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 t^4 dt = \frac{2}{25},$$

従って右辺の定数項も 0 となり、元の積分方程式を満たす。

【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 28 分。積分方程式を、微分と係数比較で多項式の問題へ落とすのが中心である。 f が 2 次式であることを示す段階では、右辺が x について高々 2 次式である点を明確に書く。微分後の等式だけでは定数分の確認が必要なので、最後に $x = 0$ を元の式へ代入して整合性を確認すると答案として堅い。

【第 3 問】

A, B, C の 3 室に 3 人ずつの人がいるとする。翌日の朝くじ引きにより、 A 室からは 1 人を B 室へ、 B 室からは 1 人を A 室へ、1 人を C 室へ、 C 室からは 1 人を B 室へ、いっせいに移動させることにする。



この移動を毎朝繰り返した場合、最初の日に A 室にいた 3 人が、3 日後の移動 (3 回目の移動) の結果 1 人も A 室にいなくなる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

最初に A 室にいた 3 人だけを印付きとして追跡する。各移動後の印付き人数を $(i, j, k) = (A \text{ 室}, B \text{ 室}, C \text{ 室})$ で表すと、1 回目の移動後は必ず $(2, 1, 0)$ になる。2 回目後の可能な状態と確率を表にし、そこから 3 回目で A 室の印付き人数が 0 になる確率を掛けて合計する。

【解答】

最初の日に A 室にいた 3 人を印付きの人として追跡する。各移動後の印付き人数を $(i, j, k) = (A \text{ 室}, B \text{ 室}, C \text{ 室})$ で表す。

1 回目の移動では、 A 室から 1 人が B 室へ移る。最初は A 室の 3 人全員が印付きなので、1 回目の移動後は必ず $(2, 1, 0)$ になる。

次に 2 回目の移動後を考える。状態 $(2, 1, 0)$ から、 A 室の印付きが B 室へ移る確率は $\frac{2}{3}$ 、移らない確率は $\frac{1}{3}$ である。また、 B 室にいる 1 人の印付きは、 A 室へ移る、 C 室へ移る、 B 室に残る、の 3 通りが同じ確率 $\frac{1}{3}$ で起こる。 C 室には印付きがない。

したがって 2 回目後の状態と確率は

2 回目後の状態	確率
$(1, 1, 1)$	$\frac{2}{9}$
$(1, 2, 0)$	$\frac{2}{9}$
$(2, 0, 1)$	$\frac{1}{9}$
$(2, 1, 0)$	$\frac{1}{9}$
$(3, 0, 0)$	$\frac{1}{3}$

である。

3 回目の移動後に A 室の印付き人数が 0 になるには、2 回目後に A 室の印付き人数が 1 でなければならない。したがって関係する状態は $(1, 1, 1)$ 、 $(1, 2, 0)$ だけである。

状態 $(1, 1, 1)$ から A 室の印付きが 0 になるには、A 室の 1 人の印付きが B 室へ選ばれ、同時に B 室から A 室へ移る人が印付きでない必要がある。この確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ である。

状態 $(1, 2, 0)$ から A 室の印付きが 0 になるには、A 室の 1 人の印付きが B 室へ選ばれ、同時に B 室から A 室へ移る人が印付きでない必要がある。B 室には印付きが 2 人、印付きでない人が 1 人いるので、この確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ である。

よって求める確率は

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{81} + \frac{2}{81} = \frac{2}{27}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

3 回目に A 室の印つき人数を 0 にできる、2 回後の二つの状態だけを追う。それぞれの到達確率と、そこから 3 回目に成功する条件付き確率を掛ける。

【解答】

最初の日に A 室にいた 3 人だけを印つきとして追跡する。1 回目の移動後の印つき人数は、必ず

$$(A, B, C) = (2, 1, 0)$$

となる。

3 回目の移動で A 室の印つき人数を 0 にするには、2 回目終了時の状態が

$$(1, 1, 1) \quad \text{または} \quad (1, 2, 0)$$

でなければならない。2 回目に A 室の印つきが選ばれる確率は $2/3$ 。また、B 室の 1 人の印つきが C 室へ移る場合と B 室に残る場合はそれぞれ確率 $1/3$ だから

$$P(1, 1, 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(1, 2, 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

状態 $(1, 1, 1)$ からは、A 室の印つきが選ばれ、かつ B 室から A 室へ移る人が印なしであればよい。その条件付き確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

状態 $(1, 2, 0)$ から同じことが起こる条件付き確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

従って求める確率は

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{27}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 32 分。3 人を個別に完全列挙しようとするると依存関係が複雑になるため、印付き人数の状態を追うのが有効である。2 回目後の状態を表にしてから、3 回目で A 室が 0 人になる可能性だけを拾うと計算量が抑えられる。B 室から A 室へ移る人が印付きかどうか最後の分岐の要点である。

【第 4 問】

- (1) すべての自然数 n に対して、不等式 $3^n > n^2$ が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。
 (2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおく。このとき、

$$\frac{2}{3}S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = -\frac{n}{3^{n+1}}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $n = 1, 2$ を確認してから、 $n \geq 2$ で帰納法のステップを示す。 $3^{n+1} > 3n^2$ と $3n^2 \geq (n+1)^2$ をつなぐ。(2) は各項を $\frac{k-1}{3^k} - \frac{k}{3^{k+1}}$ の階差形に直して和を取る。(3) は (2) の等式、等比数列の和、そして (1) から従う $\frac{n}{3^{n+1}} \rightarrow 0$ を使う。

【解答】

(1) $n = 1$ では $3^1 = 3 > 1 = 1^2$ で成り立つ。また $n = 2$ では $3^2 = 9 > 4 = 2^2$ で成り立つ。 $n \geq 2$ として、 $3^n > n^2$ が成り立つと仮定する。このとき $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n^2$ である。一方、 $3n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - 2n - 1$ であり、 $n \geq 2$ では正である。したがって $3n^2 > (n+1)^2$ なので $3^{n+1} > (n+1)^2$ が成り立つ。よって数学的帰納法により、すべての自然数 n で $3^n > n^2$ である。

- (2) 定義より

$$\frac{2}{3}S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{3^{k+1}}$$

であり、

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{3^{k+1}}$$

である。したがって

$$\frac{2}{3}S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^n \frac{2k-3}{3^{k+1}}$$

である。

ここで $\frac{2k-3}{3^{k+1}} = \frac{k-1}{3^k} - \frac{k}{3^{k+1}}$ であるから、和を取ると途中の項が消え、

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{3^k} - \frac{k}{3^{k+1}} \right) = -\frac{n}{3^{n+1}}$$

となる。よって

$$\frac{2}{3}S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = -\frac{n}{3^{n+1}}$$

である。

- (3) (1) より $3^n > n^2$ であるから $0 < \frac{n}{3^{n+1}} < \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n}$ であり、 $\frac{n}{3^{n+1}} \rightarrow 0$ である。また

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

である。(2) で $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \frac{1}{2} = 0$$

である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

不等式は数学的帰納法で証明する。和は問題の恒等式を有限等比級数と組み合わせて厳密な閉形式にし、誤差項が 0 へ収束することから極限を得る。

【解答】

(1)

$n = 1$ では $3 > 1$ 、 $n = 2$ では $9 > 4$ である。 $n \geq 2$ で $3^n > n^2$ と仮定すると

$$3^{n+1} > 3n^2.$$

また

$$3n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - 2n - 1 > 0$$

だから $3^{n+1} > (n+1)^2$ 。従ってすべての自然数 n で成立する。

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$$

に対し

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} S_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-3}{3^{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{3^k} - \frac{k}{3^{k+1}} \right) \\ &= -\frac{n}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

途中の項が相殺するので、示すべき恒等式を得る。

(3)

有限等比級数

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

を (2) へ代入して整理すると

$$S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

(1) から

$$0 < \frac{2n+3}{3^n} < \frac{2n+3}{n^2} \rightarrow 0$$

なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 18 分。帰納法、階差形の和、極限を順に使う誘導問題である。(1) では $n = 1$ からのステップだけを無理に一般化せず、 $n = 2$ も基底として確認すると不等式 $3n^2 \geq (n+1)^2$ を安全に使える。(2) の変形が見えれば、(3) は自然に決まる。

【第 5 問】

曲線 $y = x^2$ ($-2 \leq x \leq 1$) 上の相異なる 3 点を $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$, $R(c, c^2)$ ($-2 \leq a < b < c \leq 1$) とする。このとき

- (1) 三角形 PQR の面積 S を a, b, c で表せ。
- (2) a, b, c を上の条件の下で動かすとき, S の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 3 点の座標を面積公式に代入し、放物線上の点であることから因数分解する。(2) では $u = b - a, v = c - b$ とおくと、 $u > 0, v > 0, u + v = c - a \leq 3$ であり、面積が $\frac{1}{2}uv(u+v)$ になる。 $u+v$ を固定して uv を最大化し、最後に $u+v \leq 3$ を使う。

【解答】

(1) 座標の面積公式より

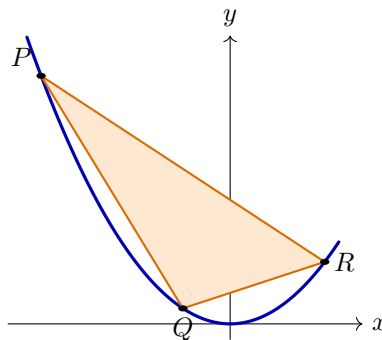
$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

である。この行列式は $(b-a)(c-a)(c-b)$ に等しい。 $a < b < c$ より各差は正なので $S = \frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a)$ である。

(2) $u = b - a, v = c - b$ とおく。すると $u > 0, v > 0$ であり、 $c - a = u + v$ である。また $-2 \leq a < c \leq 1$ より $u + v = c - a \leq 3$ である。

(1) の結果から $S = \frac{1}{2}uv(u+v)$ である。 $w = u + v$ を固定すると、 $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = \frac{w^2}{4}$ であり、等号は $u = v$ のときである。したがって $S \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{w^2}{4} \cdot w = \frac{w^3}{8}$ である。さらに $w \leq 3$ なので $S \leq \frac{27}{8}$ である。

等号は $w = 3$ かつ $u = v = \frac{3}{2}$ のときに成り立つ。これは $a = -2, b = -\frac{1}{2}, c = 1$ で実現できる。したがって最大値は $\frac{27}{8}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

3 点の座標から行列式で面積公式を導く。最大化では端点差 $w = c - a$ を固定し、積 $(b - a)(c - b)$ が b を中点にしたとき最大になることを使う。

【解答】

(1)

$P = (a, a^2)$ 、 $Q = (b, b^2)$ 、 $R = (c, c^2)$ だから

$$\begin{aligned} 2S &= \left| \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \right| \\ &= (b-a)(c-a)|(c+a)-(b+a)| \\ &= (b-a)(c-b)(c-a). \end{aligned}$$

$a < b < c$ より右辺は正なので

$$S = \frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a).$$

(2)

$w = c - a$ を固定する。正数

$$u = b - a, \quad v = c - b$$

は $u + v = w$ を満たすから

$$uv \leq \left(\frac{w}{2}\right)^2,$$

等号は $u = v = w/2$ 、すなわち $b = (a + c)/2$ のときである。よって

$$S \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{w^2}{4} \cdot w = \frac{w^3}{8}.$$

$-2 \leq a < c \leq 1$ から $w \leq 3$ なので

$$S \leq \frac{27}{8}.$$

等号は

$$a = -2, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = 1$$

で成立する。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22 分。放物線上の 3 点の面積が、横の間隔 $(b - a)$ 、 $(c - b)$ 、 $(c - a)$ だけで表されることを見抜くと後半が楽になる。最大化では、まず内点 b の位置を中点にしてから、端点 $a = -2, c = 1$ まで広げるという二段階の考え方が自然である。等号条件を実際の a, b, c で示すことを忘れない。

【第 6 問】

関数 $y = x - \sqrt{x+2}$ ($x \geq -2$) を考える。

(1) この関数の最小値と、グラフと座標軸との交点を求め、 $y = x - \sqrt{x+2}$ のグラフの概形をかけ。

(2) この関数のグラフと、直線 $x = -2$ 、および x 軸で囲まれた図形を、 x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は定義域 $x \geq -2$ を確認し、導関数で増減と最小値を求める。 x 軸との交点は平方根を含む方程式を解くが、平方する前に $x \geq 0$ が必要であることを注意する。(2) では囲まれる部分が $-2 \leq x \leq 2$ で x 軸の下側にあるので、回転体の体積を

$$\pi \int_{-2}^2 y^2 dx$$

で求める。

【解答】

(1) 定義域は $x \geq -2$ である。微分すると $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ である。 $y' = 0$ より $\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}$ だから $x = -\frac{7}{4}$ である。
 $-2 < x < -\frac{7}{4}$ では $y' < 0$ 、 $x > -\frac{7}{4}$ では $y' > 0$ なので、この点で最小値をとる。値は $-\frac{7}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}$ である。 y 軸との交点は $x = 0$ より $(0, -\sqrt{2})$ である。 x 軸との交点は $x - \sqrt{x+2} = 0$ より $x = \sqrt{x+2}$ である。右辺は 0 以上なので $x \geq 0$ であり、平方して $x^2 = x+2$ すなわち $(x-2)(x+1) = 0$ である。 $x \geq 0$ より $x = 2$ なので、交点は $(2, 0)$ である。端点では $(-2, -2)$ を通り、グラフはそこで始まり、いったん減少してから増加し、 $(2, 0)$ で x 軸に達する。

(2) 囲まれる部分は $-2 \leq x \leq 2$ にあり、この範囲でグラフは x 軸の下側にある。回転体の体積は

$$V = \pi \int_{-2}^2 (x - \sqrt{x+2})^2 dx$$

である。展開すると $(x - \sqrt{x+2})^2 = x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x+2}$ であるから

$$V = \pi \int_{-2}^2 \{x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x+2}\} dx$$

である。

まず

$$\int_{-2}^2 (x^2 + x + 2) dx = \frac{40}{3}$$

である。次に、 $u = x+2$ とおくと

$$\int_{-2}^2 2x\sqrt{x+2} dx = \int_0^4 2(u-2)u^{1/2} du$$

であり、

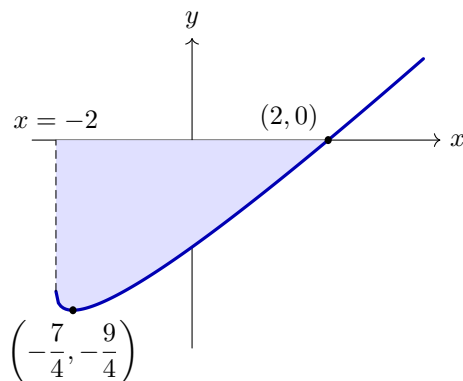
$$\int_0^4 (2u^{3/2} - 4u^{1/2}) du = \left[\frac{4}{5}u^{5/2} - \frac{8}{3}u^{3/2} \right]_0^4 = \frac{64}{15}$$

である。

したがって

$$\int_{-2}^2 (x - \sqrt{x+2})^2 dx = \frac{40}{3} - \frac{64}{15} = \frac{136}{15}$$

である。よって $V = \frac{136\pi}{15}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

$u = \sqrt{x+2}$ と置き、曲線を $x = u^2 - 2$ 、 $y = (u-2)(u+1)$ と媒介表示する。極値も回転体積も多項式だけで処理する。

【解答】

$$u = \sqrt{x+2} \quad (u \geq 0)$$

とおくと

$$x = u^2 - 2, \quad y = u^2 - u - 2 = (u-2)(u+1).$$

(1)

$$y = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

だから、 $u = 1/2$ 、すなわち $x = -7/4$ で最小値 $-9/4$ をとる。 y 軸との交点は $x = 0$ から

$$(0, -\sqrt{2}),$$

x 軸との交点は $u = 2$ から

$$(2, 0).$$

端点 $(-2, -2)$ からいったん減少し、その後増加する概形となる。

(2)

斜線部は $-2 \leq x \leq 2$ で $y \leq 0$ の部分である。 $dx = 2u du$ だから、 x 軸まわりの回転体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^2 (x - \sqrt{x+2})^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (u^2 - u - 2)^2 2u du \\ &= \frac{136\pi}{15}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 22 分。平方根関数の定義域、増減、交点、回転体積を順に処理する総合問題である。 x 軸との交点を求める際は、平方する前に $x \geq 0$ が必要である。体積ではグラフが x 軸の下側にあっても、回転半径は $|y|$ なので y^2 を積分すればよい。