

東北大学 1997 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

空間の 2 定点 $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 1, 1)$ に対し, 点 $P(x, y, z)$ は次の 2 条件 (i), (ii) を満たしながら動くとする.

(i) 点 P は, 方程式 $y = 2x$ で与えられる平面上にある.

(ii) ベクトル $\vec{OA}$ とベクトル $\vec{AP}$ は垂直である.

このとき, ベクトル $\vec{AP}$ の長さの最小値と, その最小値を与える P の座標 (x, y, z) を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

条件 (i) から $y = 2x$ とおく. 条件 (ii) は内積 $\vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$ で表し, z を x で表す. すると P は 1 つの変数で表されるので, AP^2 を x の 2 次式として平方完成し, 長さの最小値とそのときの座標を求める.

【解答】

$P = (x, y, z)$ とする. 条件 (i) より $y = 2x$ である. また $\vec{OA} = (-1, 1, 1)$, $\vec{AP} = (x+1, y-1, z-1)$ である. 条件 (ii) より $-(x+1) + (y-1) + (z-1) = 0$ だから $-x + y + z - 3 = 0$ である. ここに $y = 2x$ を代入すると $z = 3 - x$ を得る. したがって $P = (x, 2x, 3 - x)$ と表される. このとき $AP^2 = (x+1)^2 + (2x-1)^2 + (2-x)^2$ である. 展開して平方完成すると $AP^2 = 6x^2 - 6x + 6 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$ である.

よって AP^2 は $x = \frac{1}{2}$ のとき最小となり, その最小値は $\frac{9}{2}$ である. したがって AP の最小値は $\frac{3}{\sqrt{2}}$ で, そのとき $P = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$ である.

▶ 解法 2

【方針】

2 条件の交わりを直線 $P = P_0 + tv$ として捉え, 点 A からこの直線までの距離を外積公式で求める. 垂線の足の媒介変数も内積から出す.

【解答】

条件から

$$y = 2x, \quad -x + y + z - 3 = 0,$$

したがって

$$P = (x, 2x, 3 - x) = P_0 + xv, \quad P_0 = (0, 0, 3), \quad v = (1, 2, -1).$$

点 $A = (-1, 1, 1)$ からこの直線までの距離が, 求める AP の最小値である.

$$w = A - P_0 = (-1, 1, -2)$$

とおくと

$$w \times v = (3, -3, -3).$$

よって距離は

$$\frac{|w \times v|}{|v|} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

垂線の足は

$$x = \frac{w \cdot v}{|v|^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

のときだから

$$P = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right).$$

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 16 分。空間図形を座標条件と内積条件に分解すれば、実質は 1 変数 2 次関数の最小化になる。長さそのものではなく AP^2 を最小化するのが計算を軽くする標準手順である。最後に、最小値を与える x から y, z を戻すところまで書き切る。

【第 2 問】

1 個のさいころを振って、出た目の 2 乗を得点とする。この試行を 3 回行ったとき、得点の合計が 80 点以上になる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

3 回の出目を順序つきで数え、全事象を 6^3 通りとする。合計 80 点以上にするには 36 点を出す 6 の個数が重要なので、6 が 3 回、2 回、1 回の場合に分ける。6 が 0 回では最大でも $25 \times 3 = 75$ 点なので不可能である。

【解答】

出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき、得点は 1, 4, 9, 16, 25, 36 である。3 回の試行を順序つきで考えると、全体は $6^3 = 216$ 通りである。

合計が 80 点以上になる場合を、6 の出る回数で分けて数える。

6 が 3 回出る場合は 1 通りである。

6 がちょうど 2 回出る場合、残り 1 回目を r とすると $36 + 36 + r^2 \geq 80$ すなわち $r^2 \geq 8$ である。残りの目は 6 ではないので、 $r = 3, 4, 5$ の 3 通りである。6 でない目の位置は 3 通りあるから、この場合は $3 \cdot 3 = 9$ 通りである。

6 がちょうど 1 回出る場合、残り 2 回目を r, s とすると $36 + r^2 + s^2 \geq 80$ より $r^2 + s^2 \geq 44$ が必要である。5 以下の平方でこれを満たすのは $r = s = 5$ だけである。6 の位置が 3 通りあるので、この場合は 3 通りである。

6 が 1 回も出ない場合は最大でも $25 + 25 + 25 = 75$ 点であり、不可能である。したがって有利な場合は $1 + 9 + 3 = 13$ 通りである。求める確率は $\frac{13}{216}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

出目を小さい順に並べた三つ組で分類し、80 点以上となる型だけを挙げる。各型の順列数を足して全 216 通りで割る。

【解答】

出目を小さい順に並べて $r \leq s \leq t$ とする。6 がなければ最大でも

$$5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$$

なので不可能である。

6 が 2 個以上の場合、条件を満たす型は

$$(3, 6, 6), (4, 6, 6), (5, 6, 6), (6, 6, 6).$$

最初の 3 型は各 3 順列、最後は 1 順列なので 10 通り。

6 が 1 個の場合は

$$r^2 + s^2 \geq 44, \quad r, s \leq 5$$

が必要で、型は $(5, 5, 6)$ だけである。これは 3 順列。

したがって有利な順序つき出目列は

$$10 + 3 = 13$$

通り。全体は $6^3 = 216$ 通りだから

$$\frac{13}{216}.$$

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 10 分。高得点条件から 6 の個数で分類すると、列挙量をかなり減らせる。順序つきで数えているため、6 でない目の位置や 6 の位置を掛ける必要がある。6 が 1 回のときは 5, 5 だけ、6 が 0 回のときは不可能、という上限確認を入れると数え漏れを防げる。

【第 3 問】

- (1) $\log x$ を x の自然対数とする. このとき, 関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ ($x > 0$) の極値, および $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点を求め, $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (2) a を正の数とする. 不等式 $a^x \geq x^a$ が, $x \geq a$ である任意の x に対して成り立つような, a の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $f'(x)$ の符号を調べ, $x = e$ で極大になること, $x = 1$ で x 軸と交わること, 端の挙動を押さえて概形を描く. (2) は正の数について対数を取り, $a^x \geq x^a$ を $f(a) \geq f(x)$ に変形する. あとは $[a, \infty)$ で f の最大点が左端 a になる条件を読む.

【解答】

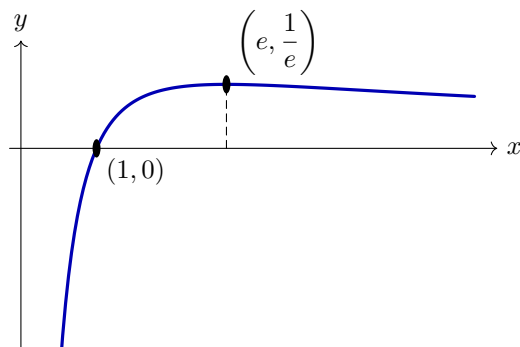
(1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ を微分すると $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ である. $x^2 > 0$ より, 符号は $1 - \log x$ で決まる. したがって $0 < x < e$ で増加, $x > e$ で減少である. よって $x = e$ で極大値 $f(e) = \frac{1}{e}$ をとる.

また, x 軸との交点は $f(x) = 0$ すなわち $\log x = 0$ より $x = 1$ である. さらに $x \rightarrow +0$ で $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow 0$ である. したがって, グラフは $x = 1$ で x 軸を横切り, $x = e$ で極大値 $1/e$ をとった後, 正のまま x 軸に近づく.

(2) $a > 0, x > 0$ なので, 対数をとると $a^x \geq x^a$ は $x \log a \geq a \log x$ と同値である. $ax > 0$ で割ると $\frac{\log a}{a} \geq \frac{\log x}{x}$ すなわち $f(a) \geq f(x)$ となる.

これが任意の $x \geq a$ で成り立つには, $[a, \infty)$ において f が左端 $x = a$ で最大になればよい. (1) より f は e まで増加し, その後減少する. したがって $a \geq e$ なら条件を満たす.

一方, $a < e$ なら $x = e$ は $x \geq a$ を満たし, しかも $f(e) > f(a)$ であるから条件を満たさない. よって求める範囲は $a \geq e$ である.



▶ 解法 2

【方針】

(1) は通常どおり増減を調べる。(2) では $\Phi(x) = x \log a - a \log x$ を直接微分し、 $x = a$ から先で常に非負となる条件を判定する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

よって $0 < x < e$ で増加、 $x > e$ で減少し、

$$x = e \text{ で極大値 } \frac{1}{e}.$$

$f(x) = 0$ は $x = 1$ 。また

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

であり、これらから概形が定まる。

(2)

$$\Phi(x) = x \log a - a \log x$$

とおく。条件 $a^x \geq x^a$ は $\Phi(x) \geq 0$ と同値で、 $\Phi(a) = 0$ である。

$$\Phi'(x) = \log a - \frac{a}{x}.$$

$a \geq e$ なら $x \geq a$ に対して

$$\Phi'(x) \geq \log a - 1 \geq 0,$$

したがって $\Phi(x) \geq \Phi(a) = 0$ 。

一方 $a < e$ なら

$$\Phi'(a) = \log a - 1 < 0$$

なので、 a のすぐ右で $\Phi(x) < 0$ となる。よって必要十分な範囲は

$$a \geq e.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。指数不等式を直接扱わず、対数を取って $\log x/x$ の大小比較へ移すのが核心である。(1) の増減結果を (2) でそのまま利用する構成なので、 $a < e$ のときに $x = e$ が反例になることまで明記すると答案が締まる。

【第 4 問】

a を定数とし、2 次曲線 $y = (x - a)^2 - 4$ の $x \geq a$ を満たす部分を E とする。4 点 $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 4)$, $D(0, 4)$ を頂点とする正方形の面積を E が 2 等分するとき、 a の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線のうち $x \geq a$ の部分なので、正方形内では右枝を $x = a + \sqrt{y + 4}$ と表す。水平な帯で見ると、曲線の右側の幅は $4 - a - \sqrt{y + 4}$ である。これを $y = 0$ から 4 まで積分し、面積が正方形の半分の 8 になる条件を解く。最後に得られた a で曲線が正方形内を横切ることを確認する。

【解答】

曲線は $y = (x - a)^2 - 4$ であり、 $x \geq a$ の部分を考えるので $x = a + \sqrt{y + 4}$ と表せる。

正方形は $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$ である。高さ y で見たとき、曲線の右側の横幅は $4 - (a + \sqrt{y + 4}) = 4 - a - \sqrt{y + 4}$ である。曲線が正方形の面積 16 を 2 等分するので、この右側の面積を 8 とおくと

$$\int_0^4 \{4 - a - \sqrt{y + 4}\} dy = 8$$

である。

計算すると

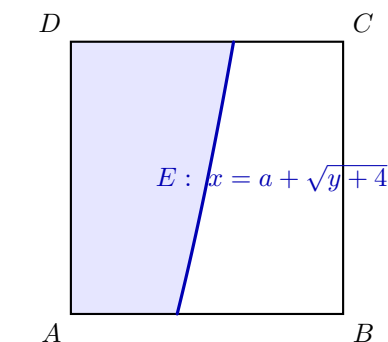
$$\int_0^4 (4 - a) dy = 16 - 4a$$

であり、

$$\int_0^4 \sqrt{y + 4} dy = \left[\frac{2}{3} (y + 4)^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3} (8^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{32\sqrt{2} - 16}{3}$$

である。したがって $16 - 4a - \frac{32\sqrt{2} - 16}{3} = 8$ となる。これを解くと $a = \frac{10 - 8\sqrt{2}}{3}$ である。

このとき下辺 $y = 0$ での x 座標は $a + 2 = \frac{16 - 8\sqrt{2}}{3}$ であり、上辺 $y = 4$ での x 座標は $a + 2\sqrt{2} = \frac{10 - 2\sqrt{2}}{3}$ である。いずれも 0 と 4 の間にあるので、上の面積式は正方形内の配置に合っている。



曲線の左側の面積を積分して 8 とおく。

▶ 解法 2

【方針】

水平断面で曲線の左側の面積を直接求める。正方形を二等分するので、その面積を 8 と置き、求めた a で境界が正方形内を横切ることを確認する。

【解答】

右枝 E は

$$x = a + \sqrt{y+4} \quad (0 \leq y \leq 4)$$

と表せる。高さ y における曲線左側の幅は $a + \sqrt{y+4}$ だから、その面積は

$$\int_0^4 (a + \sqrt{y+4}) dy.$$

これが正方形の半分 8 に等しいので

$$4a + \frac{2}{3} (8^{3/2} - 4^{3/2}) = 8.$$

したがって

$$4a + \frac{32\sqrt{2} - 16}{3} = 8,$$

$$a = \frac{10 - 8\sqrt{2}}{3}.$$

このとき

$$0 < a + 2 < a + 2\sqrt{2} < 4$$

が成り立つので、曲線は下辺から上辺まで正方形内部を横切り、用いた面積式は妥当である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 24 分。右枝だけを使う条件 $x \geq a$ を見落とさず、 $x = a + \sqrt{y+4}$ と横幅で積分するのが簡潔である。面積を縦に積分しようとする場合分けが増えやすい。最後に、求めた a で曲線が正方形の下辺から上辺まで内部を通ることを確認しておく、面積式の妥当性が明確になる。

【第 5 問】

xy 平面上の 2 つの曲線

$$y = x^2 + 1, \quad y = \left| \frac{(x+1)(x-a)}{2} \right|$$

が共有点をもたないとき、実数 a の存在する範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

共有点がある条件を調べ、その補集合を求める。絶対値の中身 $(x+1)(x-a)$ の符号に応じて、 $x^2 + 1 = \pm \frac{(x+1)(x-a)}{2}$ の 2 つの 2 次方程式に分ける。各方程式が実数解をもつ条件を判別式で求めれば、その等式自体から符号条件も自動的に満たされるので、最後に共有点をもつ a の範囲をまとめて除く。

【解答】

共有点がある条件を調べる。共有点の x 座標は $x^2 + 1 = \left| \frac{(x+1)(x-a)}{2} \right|$ を満たす。

まず $(x+1)(x-a) \geq 0$ の場合、 $x^2 + 1 = \frac{(x+1)(x-a)}{2}$ である。整理すると $2x^2 + 2 = x^2 + (1-a)x - a$ より $x^2 + (a-1)x + a+2 = 0$ を得る。この方程式の解では $(x+1)(x-a) = 2(x^2 + 1) > 0$ となるので、符号条件も満たされる。判別式は $\Delta_1 = (a-1)^2 - 4(a+2) = a^2 - 6a - 7 = (a+1)(a-7)$ である。したがってこの場合に共有点をもつのは $a \leq -1$ または $a \geq 7$ である。

次に $(x+1)(x-a) < 0$ の場合、 $x^2 + 1 = -\frac{(x+1)(x-a)}{2}$ である。整理すると $2x^2 + 2 = -x^2 - (1-a)x + a$ より $3x^2 + (1-a)x + 2-a = 0$ を得る。この方程式の解では $(x+1)(x-a) = -2(x^2 + 1) < 0$ となるので、やはり符号条件も満たされる。判別式は $\Delta_2 = (1-a)^2 - 12(2-a) = a^2 + 10a - 23$ である。よって $a^2 + 10a - 23 \geq 0$ を解いて $a \leq -5 - 4\sqrt{3}$ または $a \geq -5 + 4\sqrt{3}$ となる。

以上を合わせると、共有点をもつ a の範囲は $a \leq -1$ または $a \geq -5 + 4\sqrt{3}$ である。したがって共有点をもたない範囲は $-1 < a < -5 + 4\sqrt{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

絶対値の正負に対応する二つの二次方程式が、ともに実数解を持たない条件を直接交差させる。各方程式の解では元の符号条件が自動的に従う。

【解答】

共有点がないためには

$$x^2 + 1 = \frac{(x+1)(x-a)}{2}$$

と

$$x^2 + 1 = -\frac{(x+1)(x-a)}{2}$$

のどちらも実数解を持たなければよい。各等式が成り立てば右辺の符号は $x^2 + 1 > 0$ から自動的に正しくなる。

第 1 式は

$$x^2 + (a-1)x + a + 2 = 0$$

で、実数解を持たない条件は

$$(a-1)^2 - 4(a+2) < 0 \iff -1 < a < 7.$$

第 2 式は

$$3x^2 + (1-a)x + 2 - a = 0$$

で、実数解を持たない条件は

$$\begin{aligned} (1-a)^2 - 12(2-a) &< 0 \\ \iff -5 - 4\sqrt{3} &< a < -5 + 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

両区間の共通部分を取って

$$-1 < a < -5 + 4\sqrt{3}.$$

端点では重解、すなわち共有点を持つため含まない。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。絶対値を外した後の 2 つの 2 次方程式について、判別式で実数解の有無を調べる問題である。各方程式が解をもつときには、その等式から符号条件も同時に従う点を明記すると、符号範囲の確認がすっきりする。端点では共有点が生じるため、最終答えは厳密な不等号になる。

【第 6 問】

関数 $f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$ ($|x| \leq 1$) を考える.

- (1) $f(x)$ の最大値と最小値を求め、 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
- (2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$ は奇関数なので、増減と面積は $0 \leq x \leq 1$ を中心に調べる。微分して臨界点 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を求め、奇関数性から最小値を得る。面積は正の部分の 2 倍し、 $u = 1 - x^2$ で置換積分する。

【解答】

(1) $f(-x) = -f(x)$ であるから、 f は奇関数である。 $-1 < x < 1$ で微分すると $f'(x) = 3x^2\sqrt{1-x^2} + x^3 \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ であり、整理して $f'(x) = \frac{x^2(3-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ となる。 $0 < x < 1$ では分母と x^2 は正であるから、符号は $3-4x^2$ で決まる。よって

$$0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{で増加,} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} < x < 1 \quad \text{で減少}$$

である。したがって最大値は

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

である。奇関数より最小値は $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ で、 $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のときに達する。グラフは $x = -1, 0, 1$ で x 軸と交わり、原点に関して対称である。

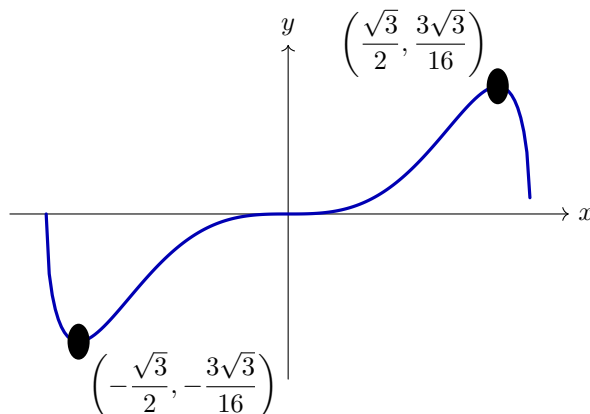
(2) 面積は正の部分の 2 倍して

$$S = 2 \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

である。 $u = 1 - x^2$ とおくと、 $du = -2x dx$, $x^2 = 1 - u$ であるから

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u) u^{1/2} du$$

となる。よって $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{15}$ である。したがって $S = 2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

奇関数性を使い、正の側では $f^2 = x^6(1 - x^2)$ を最大化して平方根の微分を避ける。面積は $u = x^2$ でベータ型の積分へ変える。

【解答】

(1)

f は奇関数である。 $0 \leq x \leq 1$ では $f \geq 0$ なので

$$f(x)^2 = x^6(1 - x^2)$$

を最大化すればよい。微分すると

$$\frac{d}{dx} f(x)^2 = 2x^5(3 - 4x^2).$$

したがって最大は $x = \sqrt{3}/2$ で、

$$f_{\max} = \sqrt{\frac{27}{256}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

奇関数性から最小値は $-3\sqrt{3}/16$ で、 $x = -\sqrt{3}/2$ のとき取る。零点は $-1, 0, 1$ で、原点对称の概形となる。

(2)

$$S = 2 \int_0^1 x^3 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

$u = x^2$ とおくと $x^3 dx = u du/2$ だから

$$S = \int_0^1 u \sqrt{1 - u} du.$$

$v = 1 - u$ と置けば

$$S = \int_0^1 (1 - v) v^{1/2} dv = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22 分。奇関数性を先に見ると、最大・最小も面積も半分だけ調べればよい。微分では平方根の分母が出るが、符号判定に必要なのは $3 - 4x^2$ だけである。面積では負の部分をそのまま積分しないよう、正の面積として 2 倍する点に注意する。