

# 入 学 試 験 問 題



## 数 学

東 北 大 学 1998 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

行列  $A = \begin{pmatrix} 4a+1 & b \\ 4 & 4c-1 \end{pmatrix}$  において  $a, b, c$  はすべて整数であり,  $A^2 = E$  ( $E$  は単位行列) とする.

(1)  $b$  および  $c$  を  $a$  の式で表せ. (2) 行列  $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  が存在して,  $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  が成り立つとき, 行列  $P$  の成分を  $a$  の式で表せ. ただし,  $p, q, r, s$  はすべて整数で  $ps - qr = 1$  とする.

## 第 2 問

＋（プラス）と－（マイナス）を  $n$  個でたらめに並べるとき，同符号が続く部分の長さの最大値が  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) となる確率を  $P(k)$  で表す．（例： $n = 10$  で  $++--+-++$  のときは， $k = 3$ ．）

(1)  $P(n-1)$  を求めよ． (2)  $2^n P(k)$  は，偶数であることを示せ． (3)  $k \geq \frac{n}{2}$  のとき， $P(k)$  を求めよ．

### 第 3 問

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  は, 初項  $\frac{1}{a}$ , 公差  $d$  の等差数列とする. このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1})$  を求めよ.

## 第 4 問

空間において，2 点

$$P = (-t, -1, t^2 - 1), \quad Q = \left( t, 1, \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} \right)$$

を考える．ただし  $|t| \leq 1$  とする． $0 < u < 1$  である  $u$  に対して線分  $PQ$  と平面  $y = u$  との交点を  $R = (x, y, z)$  とする．

(1)  $t$  を  $-1$  から  $1$  まで動かすとき， $x$  の動く範囲を  $u$  で表せ．(2)  $R$  の  $z$  座標を  $x$  と  $u$  の式で表せ．(3)  $t$  を  $-1$  から  $1$  まで動かすとき，線分  $PQ$  が動いてできる図形と 2 平面  $y = 1$ ， $z = 0$  とで囲まれる部分の体積を求めよ．

## 第 5 問

$\theta$  の関数  $f(\theta) = (\sqrt{1 - \cos \theta} + \sqrt{1 - \sin \theta})^2$  を考える.

(1)  $x = \cos \theta + \sin \theta$  とおくとき,  $f(\theta)$  を  $x$  を用いて表せ. (2)  $f(\theta)$  の最大値, 最小値を求めよ.

## 第 6 問

(1)  $xy$  平面上の原点  $O$  と異なる点  $P$  に対し,  $\overrightarrow{OP} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  ( $r > 0$ ) とする. 点  $P$  を通りベクトル  $\overrightarrow{OP}$  に直交する直線の方程式を求めよ. (2) 楕円  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a, b > 0$ ) の任意の接線に, 原点  $O$  から下した垂線を  $OP$  とする. また, ベクトル  $\overrightarrow{OP}$  に対し  $r, \theta$  を (1) のように定義する. このとき,  $r$  を  $\theta$  で表せ.

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)