

東北大学 1998 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $A = \begin{pmatrix} 4a+1 & b \\ 4 & 4c-1 \end{pmatrix}$ において a, b, c はすべて整数であり, $A^2 = E$ (E は単位行列) とする.

(1) b および c を a の式で表せ. (2) 行列 $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が存在して, $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 行列 P の成分を a の式で表せ. ただし, p, q, r, s はすべて整数で $ps - qr = 1$ とする.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $A^2 = E$ を成分比較し、下左成分から $c = -a$ 、上左成分から $b = -2a(2a+1)$ を得る。(2) では $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を列ごとに読み、第 1 列 $\mathbf{u}$ は $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$ 、第 2 列 $\mathbf{v}$ は $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ を満たすとして直接連立一次方程式を解く。最後に $ps - qr = 1$ から整数倍率を決める。

【解答】

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 4a+1 & b \\ 4 & 4c-1 \end{pmatrix}$$

である。 $A^2 = E$ の左下成分を比べると $4(4a+1) + 4(4c-1) = 0$ であるから $16a + 16c = 0$, $c = -a$ を得る。次に左上成分を比べると $(4a+1)^2 + 4b = 1$ である。よって $16a^2 + 8a + 4b = 0$ となり、 $b = -4a^2 - 2a = -2a(2a+1)$ である。

(2) (1) より

$$A = \begin{pmatrix} 4a+1 & -2a(2a+1) \\ 4 & -4a-1 \end{pmatrix}$$

である。 P の第 1 列を C_{pr} 、第 2 列を C_{qs} とする。条件

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

は、列ごとに $AC_{pr} = C_{pr}$, $AC_{qs} = -C_{qs}$ を意味する。

まず $AC_{pr} = C_{pr}$ を考える。下の成分から $4p + (-4a-1)r = r$ すなわち $4p = (4a+2)r$ である。したがって整数 m を用いて $C_{pr} = mC_{2a+1}$ と表せる。

次に $AC_{qs} = -C_{qs}$ を考える。下の成分から $4q + (-4a-1)s = -s$ であるから $4q = 4as$ となる。したがって整数 n を用いて $C_{qs} = nCa1$ と表せる。

よって

$$P = \begin{pmatrix} m(2a+1) & na \\ 2m & n \end{pmatrix}$$

である。この行列式は $ps - qr = mn((2a+1) - 2a) = mn$ である。条件 $ps - qr = 1$ より $mn = 1$ であり、整数 m, n については $(m, n) = (1, 1), (-1, -1)$ の 2 通りである。したがって

$$P = \begin{pmatrix} 2a+1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad P = -\begin{pmatrix} 2a+1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は A^2 の必要な 2 成分だけを比較する。(2) は整数行列の候補を直接構成して恒等式と行列式を検算し、固有方向の互いに素な成分から他の候補がないことを示す。

【解答】

(1)

$A^2 = E$ の左下成分から

$$4(4a + 1) + 4(4c - 1) = 0,$$

よって $c = -a$ である。左上成分から

$$(4a + 1)^2 + 4b = 1$$

なので

$$b = -2a(2a + 1).$$

(2)

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2a + 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と置く。直接掛け算すると

$$AP_0 = P_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det P_0 = 1.$$

したがって $P = P_0$ と $P = -P_0$ はともに条件を満たす。

他の可能性も確認する。第 1 列は A の固有値 1 の整数ベクトルなので

$$(p, r) = m(2a + 1, 2),$$

第 2 列は固有値 -1 の整数ベクトルなので

$$(q, s) = n(a, 1).$$

$2a + 1$ と 2、また a と 1 はそれぞれ互いに素だから、この整数倍表示で漏れはない。行列式は mn となり、 $mn = 1$ から

$$(m, n) = (1, 1), (-1, -1).$$

よって

$$P = \pm \begin{pmatrix} 2a + 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 22 分。行列の抽象的な性質を使わなくても、成分比較と列ベクトルの連立方程式だけで解ける。 $A^2 = E$ では必要な成分を選んで b, c を出し、(2) では右から対角行列を掛ける意味を「第 1 列はそのまま、第 2 列は符号が反転」と読むのが要点である。最後の $mn = 1$ で符号 2 通りを落とさないこと。

【第 2 問】

＋（プラス）と－（マイナス）を n 個でたらめに並べるとき、同符号が続く部分の長さの最大値が k ($k = 1, 2, \dots, n$) となる確率を $P(k)$ で表す。（例： $n = 10$ で $++--++--$ ）のときは、 $k = 3$ 。）

(1) $P(n-1)$ を求めよ。(2) $2^n P(k)$ は、偶数であることを示せ。(3) $k \geq \frac{n}{2}$ のとき、 $P(k)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

同じ符号が連続する最大の長さを、符号列の連続ブロックで数える。(1) は $n = 2$ の例外を確認し、 $n \geq 3$ では 1 つだけ違う符号が端または内部にある 4 通りを数える。(2) は全符号反転で 2 個ずつ組にする。(3) は $k \geq n/2$ のため、長さ k のブロックが高々 1 つ、ただし n 偶数かつ $k = n/2$ では 2 つあり得る、という分け方で数える。

【解答】

(1) まず $n = 2$ のときは、最大の長さが 1 となる列は $+-, -+$ の 2 通りであるから $P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ である。

以下 $n \geq 3$ とする。最大の長さが $n-1$ となるには、長さ $n-1$ の同符号のブロックが 1 つあり、残り 1 個だけが反対の符号でなければならない。反対の符号が左端にある場合と右端にある場合、さらに全体の符号を反転した場合があるので、該当する列は 4 通りである。したがって $P(n-1) = \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$ である。

(2) 任意の符号列について、すべての $+$ と $-$ を入れ替える。この操作をしても、同符号が続く部分の長さは変わらない。また、入れ替えた後の列がもとの列と一致することはない。したがって、最大の長さが k である列全体は 2 個ずつ組に分けられる。よって、その個数である $2^n P(k)$ は偶数である。

(3) まず $k = n$ のときは、すべて $+$ またはすべて $-$ の 2 通りなので $P(n) = \frac{2}{2^n}$ である。

次に $n/2 < k < n$ とする。このとき長さ k のブロックは 2 つ同時には存在できない。長さ k のブロックの符号を先に決めると 2 通りである。ブロックの左に L 個、右に R 個の文字があるとする $L + R = n - k$ である。ブロックのすぐ左またはすぐ右に文字がある場合、その文字はブロックと反対の符号でなければならない。残りの文字は全部で $n - k - 1$ 個または $n - k - 2$ 個となり、どのように並べても長さ k を超えるブロックはできない。 $m = n - k$ とおく。ブロックが端にある場合は 2 か所あり、それぞれ $2 \cdot 2^{m-1}$ 通りである。ブロックが端でない場合は $m - 1$ か所あり、それぞれ $2 \cdot 2^{m-2}$ 通りである。したがって個数は $2 \cdot 2 \cdot 2^{m-1} + (m - 1) \cdot 2 \cdot 2^{m-2} = (m + 3)2^{m-1}$ である。つまり $2^n P(k) = (n - k + 3)2^{n-k-1}$ である。

最後に、 n が偶数で $k = n/2$ の場合を考える。このとき上と同じ数え方では、長さ k のブロックが 2 つある列

$$\underbrace{++ \cdots ++}_{k} \underbrace{-- \cdots --}_{k}, \quad \underbrace{-- \cdots --}_{k} \underbrace{++ \cdots ++}_{k}$$

をそれぞれ 2 回数えている。したがって、 $m = k$ として得られる $(k + 3)2^{k-1}$ から 2 を引き、 $2^n P(k) = (k + 3)2^{k-1} - 2 = 2\{(k + 3)2^{k-2} - 1\}$ である。

以上より、 $k \geq n/2$ では

$$P(k) = \begin{cases} \frac{2}{2^n}, & k = n, \\ \frac{(n - k + 3)2^{n-k-1}}{2^n}, & \frac{n}{2} < k < n, \\ \frac{(k + 3)2^{k-1} - 2}{2^n}, & n \text{ が偶数で } k = \frac{n}{2}. \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

符号列を連続ブロック長の組、すなわち n の合成と対応させる。最初の符号 2 通りを掛け、 $k \geq n/2$ では長さ k の部分が高々 1 つであることから合成を数える。

【解答】

符号列は「最初の符号」と「各連続ブロックの長さ」によって一意に決まる。したがって符号列は、 n の合成 1 つにつき最初の符号 2 通りに対応する。

(1)

$n \geq 3$ では合成の最大部分が $n-1$ となるものは

$$(n-1, 1), \quad (1, n-1)$$

の 2 つである。最初の符号を掛けて 4 列だから

$$P(n-1) = \frac{4}{2^n}.$$

$n=2$ では $P(1) = 1/2$ である。

(2)

最初の符号は常に 2 通りなので、どのブロック長の合成に対しても符号列は 2 列ずつ現れる。よって $2^n P(k)$ は偶数である。

(3)

$n/2 < k < n$ とし、 $m = n - k$ と置く。長さ k の部分は 1 つだけである。その左側の和を j 、右側を $m - j$ とする。正整数 s の合成数は 2^{s-1} 、0 の合成は空列 1 通りなので、印を付けた部分 k の置き方は

$$2 \cdot 2^{m-1} + (m-1)2^{m-2} = (m+3)2^{m-2}.$$

最初の符号 2 通りを掛け、

$$2^n P(k) = (m+3)2^{m-1}.$$

$n = 2k$ のときは合成 (k, k) が印を付ける部分の選択により 2 回数えられるので、符号列 2 通りを引く。したがって

$$P(k) = \begin{cases} \frac{2}{2^n} & (k = n), \\ \frac{(n-k+3)2^{n-k-1}}{2^n} & (n/2 < k < n), \\ \frac{(k+3)2^{k-1} - 2}{2^n} & (n = 2k). \end{cases}$$

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 32 分。最大連続長を数える問題では、長さ k のブロックを 1 つ指定してから両側を数えると整理しやすい。 $n/2 < k$ ではブロックが 1 つしか置けないこと、 $k = n/2$ では 2 つ置ける場合だけ重複が起きることが核心である。(1) は $n = 2$ だと一般式の状況と重なるので、端の例外を一言処理しておくとうまくいく。

【第 3 問】

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は、初項 $\frac{1}{a}$ 、公差 d の等差数列とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1})$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

逆数列を具体的に $1/a_n = 1/a + (n-1)d$ と書き、隣り合う逆数の差から $a_n a_{n+1}$ を $a_n - a_{n+1}$ の形に直す。すると和が望ましい形で消える。 $d = 0$ では同じ変形が使えないため、定数列として別に扱う。

【解答】

逆数列が初項 $1/a$ 、公差 d の等差数列であるから $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} + (n-1)d$ である。まず $d \neq 0$ の場合を考える。このとき $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = d$ である。左辺を通分すると $\frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = d$ なので $a_n a_{n+1} = \frac{a_n - a_{n+1}}{d}$ である。したがって部分和は

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} &= \frac{1}{d} \{(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1})\} \\ &= \frac{a_1 - a_{n+1}}{d} \end{aligned}$$

となる。

ここで $d \neq 0$ なら $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a} + nd$ の絶対値は n とともに大きくなるので、 $a_{n+1} \rightarrow 0$ である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1}) = \frac{a_1}{d} = \frac{a}{d}$$

である。

一方 $d = 0$ のときは $1/a_n = 1/a$ であり、すべての n について $a_n = a$ である。したがって部分和は na^2 となる。 $a \neq 0$ だから $na^2 \rightarrow +\infty$ であり、有限な極限は存在しない。

▶ 解法 2

【方針】

a_n を n の有理式として明示し、隣接積を部分分数分解して望ましい形にする。 $d = 0$ は定数列として発散先まで分ける。

【解答】

等差数列の条件から

$$a_n = \frac{a}{1 + (n-1)ad}.$$

$d \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} a_n a_{n+1} &= \frac{a^2}{\{1 + (n-1)ad\}(1 + nad)} \\ &= \frac{1}{d} \left\{ \frac{a}{1 + (n-1)ad} - \frac{a}{1 + nad} \right\} \\ &= \frac{a_n - a_{n+1}}{d}. \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{j=1}^n a_j a_{j+1} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{d}.$$

$a_{n+1} \rightarrow 0$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j a_{j+1} = \frac{a}{d}.$$

$d = 0$ のときは $a_n = a$ であり、 $a \neq 0$ だから

$$\sum_{j=1}^n a_j a_{j+1} = na^2 \longrightarrow +\infty.$$

よって有限値 a/d は $d \neq 0$ の場合に限る。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 15 分。逆数が等差数列であることを、隣り合う逆数の差に使うと積が階差に変わる。ここが見えれば和はすぐに消える。注意点は、 $d = 0$ を同じ式に代入しないことと、 $d \neq 0$ では $a_{n+1} \rightarrow 0$ を逆数の一次式から確認することである。 $d = 0$ では $na^2 \rightarrow +\infty$ と発散先まで明示する。

【第 4 問】

空間において、2 点

$$P = (-t, -1, t^2 - 1), \quad Q = \left(t, 1, \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2}\right)$$

を考える。ただし $|t| \leq 1$ とする。 $0 < u < 1$ である u に対して線分 PQ と平面 $y = u$ との交点を $R = (x, y, z)$ とする。

(1) t を -1 から 1 まで動かすとき、 x の動く範囲を u で表せ。(2) R の z 座標を x と u の式で表せ。(3) t を -1 から 1 まで動かすとき、線分 PQ が動いてできる図形と 2 平面 $y = 1, z = 0$ とで囲まれる部分の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

線分 PQ 上の点を、 P から Q への内分比で表す。 $y = u$ となる比は $(1 + u)/2$ なので、 $x = ut$ と z の式が得られる。体積は、固定した u での断面を x 方向に足し上げ、その断面積を $0 \leq u \leq 1$ で積分する。 $x = ut$ に戻すと、必要な計算は $1 - t^2$ と指数関数の偶対称な積分に分かれる。

【解答】

(1) 線分 PQ 上の点を $(1 - \lambda)P + \lambda Q$ と表す。 y 座標は $(1 - \lambda)(-1) + \lambda \cdot 1 = -1 + 2\lambda$ である。これが u に等しいので $\lambda = \frac{1 + u}{2}$ である。したがって x 座標は $x = (1 - \lambda)(-t) + \lambda t = (2\lambda - 1)t = ut$ となる。 $|t| \leq 1$ より $-u \leq x \leq u$ である。

(2) (1) と同じ $\lambda = (1 + u)/2$ を用いると、 z 座標は

$$z = \frac{1 - u}{2}(t^2 - 1) + \frac{1 + u}{2} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} \right)$$

である。 $x = ut$ だから $t = x/u$ であり、

$$z = \frac{1 - u}{2} \left\{ \left(\frac{x}{u} \right)^2 - 1 \right\} + \frac{1 + u}{2} \left\{ \frac{e^{x/u} + e^{-x/u}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} \right\}$$

である。

(3) $|t| \leq 1$ では $t^2 - 1 \leq 0$ であり、また $e^t + e^{-t}$ は $[-1, 1]$ で最大値を端点 $t = \pm 1$ でとる。したがって (2) の z は 0 以下であり、平面 $z = 0$ との間の高さは $-z$ である。

固定した u における断面積を $S(u)$ とすると、

$$S(u) = \int_{-u}^u (-z) dx$$

である。ここで $x = ut$ と戻すと $dx = u dt$ であり、

$$S(u) = u \int_{-1}^1 \left[\frac{1 - u}{2}(1 - t^2) + \frac{1 + u}{2} \left\{ \frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right\} \right] dt.$$

必要な積分は

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}$$

および

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right\} dt = (e + e^{-1}) - (e - e^{-1}) = \frac{2}{e}$$

である。よって $S(u) = u \left\{ \frac{2(1 - u)}{3} + \frac{1 + u}{e} \right\}$ となる。

求める体積は

$$V = \int_0^1 S(u) du$$

であるから

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left\{ \frac{2u(1-u)}{3} + \frac{u(1+u)}{e} \right\} du \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right) + \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{3e} \right) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{6e} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

掃過面を (u, t) で直接媒介表示し、 $x=ut$ のヤコビアン u を使って体積を二重積分する。多項式部分と指数部分を分離して評価する。

【解答】

$y = u$ における線分上の点は、 P, Q の内分比から

$$x = ut,$$

$$z = \frac{1-u}{2}(t^2 - 1) + \frac{1+u}{2} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e + e^{-1}}{2} \right).$$

したがって $|t| \leq 1$ より $-u \leq x \leq u$ であり、 $t = x/u$ とすれば (1), (2) の式を得る。

(3)

$0 \leq u \leq 1$, $|t| \leq 1$ で $z \leq 0$ である。写像 $x = ut$ では

$$dx = u dt.$$

よって体積は直接

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (-z) u dt du \\ &= \int_0^1 u \left[\frac{1-u}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2) dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1+u}{2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{e + e^{-1}}{2} - \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right\} dt \right] du. \end{aligned}$$

二つの t 積分はそれぞれ

$$\frac{4}{3}, \quad \frac{2}{e}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left\{ \frac{2u(1-u)}{3} + \frac{u(1+u)}{e} \right\} du \\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{6e}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、計算量 8。目安時間は 35 分。空間内で動く線分を、平面 $y = u$ の断面に落として処理する問題である。 y 座標から内分比 $(1+u)/2$ を決めること、 $x = ut$ によって範囲 $[-u, u]$ を得ること、最後に $x = ut$ へ戻して積分を簡単にすることが重要である。指数部分は偶対称なので、端点値との差として $2/e$ が出ることを丁寧に計算したい。

【第 5 問】

θ の関数 $f(\theta) = (\sqrt{1 - \cos \theta} + \sqrt{1 - \sin \theta})^2$ を考える.

(1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ を x を用いて表せ. (2) $f(\theta)$ の最大値、最小値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$x = \cos \theta + \sin \theta$ と置き、 $(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)$ を x だけで表す。 $x^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ を使うと平方根の中身が $(x - 1)^2/2$ になり、絶対値を含む 1 変数関数に変わる。あとは $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ で、 $x \leq 1$ と $x \geq 1$ に分けて最大・最小を読む。

【解答】

(1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおく。まず

$$f(\theta) = 2 - (\cos \theta + \sin \theta) + 2\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)}$$

である。したがって $f(\theta) = 2 - x + 2\sqrt{(1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta)}$ である。

また $x^2 = (\cos \theta + \sin \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より $\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$ である。よって

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta) &= 1 - (\cos \theta + \sin \theta) + \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - x + \frac{x^2 - 1}{2} \\ &= \frac{(x - 1)^2}{2} \end{aligned}$$

である。したがって $f(\theta) = 2 - x + \sqrt{2}|x - 1|$ である。

(2) $x = \cos \theta + \sin \theta$ の範囲は $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ である。 $x \leq 1$ では $f = 2 - x + \sqrt{2}(1 - x) = 2 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})x$ であるから、 x が大きくなるほど小さくなる。したがってこの範囲での最大値は $x = -\sqrt{2}$ のとき $2 + \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}$ であり、最小値は $x = 1$ のとき 1 である。 $x \geq 1$ では $f = 2 - x + \sqrt{2}(x - 1) = 2 - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)x$ である。これは x が大きくなるほど大きくなるので、この範囲での最小値はやはり $x = 1$ のとき 1 である。最大値は $x = \sqrt{2}$ のとき $2 - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$ であり、先ほどの $4 + 2\sqrt{2}$ より小さい。

よって 最大値 $4 + 2\sqrt{2}$, 最小値 1 である。

▶ 解法 2

【方針】

平方根の積を完全平方へ直して x だけの折れ線関数にする。二つの区間の端点値をすべて比較し、実現する θ も確認する。

【解答】

(1)

$$x = \cos \theta + \sin \theta$$

と置くと

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

よって

$$\begin{aligned} (1 - \cos \theta)(1 - \sin \theta) &= 1 - x + \frac{x^2 - 1}{2} \\ &= \frac{(x - 1)^2}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$f = 2 - x + \sqrt{2}|x - 1|.$$

(2)

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ であり、

$$f = \begin{cases} 2 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})x & (x \leq 1), \\ 2 - \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)x & (x \geq 1). \end{cases}$$

前者は減少、後者は増加する。候補値は

x	f
$-\sqrt{2}$	$4 + 2\sqrt{2}$
1	1
$\sqrt{2}$	$4 - 2\sqrt{2}$

である。各 x は $\cos \theta + \sin \theta$ の値として実現するから

$$\text{最大値 } 4 + 2\sqrt{2}, \quad \text{最小値 } 1.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 16 分。平方根を別々に扱うと見通しが悪いが、 $\cos \theta + \sin \theta$ にまとめると根号の中身が完全平方になる。絶対値 $|x - 1|$ の分岐を忘れないこと、 x の範囲が $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ であること、 $x = 1$ が実際に取れることを確認すれば、最大・最小は一次式の端点比較で終わる。

【第 6 問】

(1) xy 平面上の原点 O と異なる点 P に対し、 $\overrightarrow{OP} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ ($r > 0$) とする。点 P を通りベクトル $\overrightarrow{OP}$ に直交する直線の方程式を求めよ。(2) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) の任意の接線に、原点 O から下した垂線を OP とする。また、ベクトル $\overrightarrow{OP}$ に対し r, θ を (1) のように定義する。このとき、 r を θ で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は OP を法線ベクトルとして点 P を通る直線を書く。(2) は接線を法線形で表し、楕円上の一次式の最大値を三角関数の合成で求める。

【解答】

(1) $\overrightarrow{OP} = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ であるから、求める直線の法線ベクトルは $(\cos \theta, \sin \theta)$ である。したがって直線は $x \cos \theta + y \sin \theta = C$ と表せる。この直線は $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ を通るので $C = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$ である。よって $x \cos \theta + y \sin \theta = r$ である。

(2) (1) より、原点から下ろした垂線の方が θ で長さが r である接線は $x \cos \theta + y \sin \theta = r$ と書ける。この直線が楕円に接するには、楕円上で $x \cos \theta + y \sin \theta$ がとる最大値がちょうど r であればよい。

楕円上の点を $(x, y) = (a \cos u, b \sin u)$ とおくと $x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos u \cos \theta + b \sin u \sin \theta$ である。これは u について $A \cos u + B \sin u$ の形であり、最大値は $\sqrt{A^2 + B^2}$ である。ここで $A = a \cos \theta, B = b \sin \theta$ だから $r = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は OP を法線とする直線の標準形を書く。(2) は楕円の接点を媒介表示し、接線公式と原点から直線までの距離を使って法線方向との関係を消去する。

【解答】

(1)

$\overrightarrow{OP}$ と直交する直線の単位法線は

$$(\cos \theta, \sin \theta)$$

である。 $P = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ を通るので

$$x \cos \theta + y \sin \theta = r.$$

(2)

接点を

$$(a \cos u, b \sin u)$$

と置くと、接線は

$$\frac{x \cos u}{a} + \frac{y \sin u}{b} = 1.$$

原点からこの直線までの距離は

$$r = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 u/a^2 + \sin^2 u/b^2}}.$$

単位法線が $(\cos \theta, \sin \theta)$ だから

$$\cos \theta = \frac{r \cos u}{a}, \quad \sin \theta = \frac{r \sin u}{b}.$$

したがって

$$a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 u + \sin^2 u) = r^2.$$

$r > 0$ より

$$r = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。点 P への垂線を、直線の法線方向として読むのが中心である。(2) は接線を法線形で書くと、楕円上での最大値を求める問題になる。 $a \cos u \cos \theta + b \sin u \sin \theta$ の最大値を三角関数の合成で出せば計算は短い。別解の接線公式を使う場合は、法線ベクトルの正規化を忘れないことが主な注意点である。