

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 1998 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

(1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ のとき, $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ. (2) (1) の $f(x)$, $g(x)$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$$

第 2 問

2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ に対し, $s + v$ を X のトレースという. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ と A^2 のトレースがともに -1 であるとする.

(1) $A^3 = E$ を示せ. ただし, E は単位行列である. (2) 連立 1 次方程式 $(A + E)^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ を解け.

第 3 問

ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面 (底面) の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n ，底面にくる確率を b_n とおく．

(1) a_2 を求めよ． (2) a_{n+1} と a_n の関係式を導け． (3) b_n を n の式で表し， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ．

第 4 問

a と b は $\pm 1, 0$ でない実数とする. 実数 x, y が, $\frac{\sin x}{\sin y} = a, \frac{\cos x}{\cos y} = b$ を満たしているとする.

(1) $\tan^2 y$ を a, b を用いて表せ. (2) 点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ.

第 5 問

x の方程式 $x^2 + a|x - 1| + b = 0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき，点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

第 6 問

(1) 点 $P(p, q)$ と円 $C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) との距離 d とは, P と C 上の点 (x, y) との距離の最小値をいう. P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて, d を表す式を求めよ. (2) 2つの円 $C_1 : (x + 4)^2 + y^2 = 81$ と $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)