

東北大学 1998 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

(1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ のとき, $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ. (2) (1) の $f(x)$, $g(x)$ に対し, 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $y = e^x/(e^x + 1)$ を e^x について解き, 値域 $0 < y < 1$ を逆関数の定義域にする。(2) は逆関数の積分公式そのものだが, ここでは両辺の差を b の関数と見て微分し, 導関数が 0 であることと $b = a$ で 0 になることから示す。

【解答】

(1) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$ より $y(e^x + 1) = e^x$ であるから $e^x = \frac{y}{1 - y}$ である。したがって逆関数は $g(y) = \log \frac{y}{1 - y}$ ($0 < y < 1$) である。

(2)

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx - bf(b) + af(a)$$

とおく。 $g(f(b)) = b$ であるから $F'(b) = f(b) + g(f(b))f'(b) - f(b) - bf'(b) = 0$ である。したがって $F(b)$ は定数である。
 $b = a$ のとき $F(a) = 0$ であるから、すべての b について

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = bf(b) - af(a)$$

が成り立つ。

(2) の微分による証明では, 上端が $f(b)$ の積分を微分する点が重要である。すなわち

$$\frac{d}{db} \int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx = g(f(b))f'(b) = bf'(b)$$

である。これは g が f の逆関数であるため $g(f(b)) = b$ となるからである。したがって差の導関数は 0 になり, $b = a$ で両辺がともに 0 になることから等式が従う。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は指数方程式を解く。(2) は f のグラフと逆関数のグラフが $y=x$ について対称であることを用い、対応する曲線下の面積を長方形へ組み替える。

【解答】

(1)

$$y = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

を e^x について解くと

$$e^x = \frac{y}{1-y}.$$

したがって

$$g(y) = \log \frac{y}{1-y} \quad (0 < y < 1).$$

(2)

$y = f(x)$ の $a \leq x \leq b$ の部分を直線 $y = x$ に関して反転すると、 $y = g(x)$ の $f(a) \leq x \leq f(b)$ の部分になる。

長方形

$$[a, b] \times [f(a), f(b)]$$

を考えると、 f の下側の面積と、反転後の g の下側の面積を組み替えたものは、右上までの積から左下までの積を引いた

$$bf(b) - af(a)$$

に等しい。境界を積分で表せば

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a)$$

を得る。これは逆関数の面積公式の図形的証明である。

【総評】 逆関数と積分の関係を証明する問題である。所要時間は 12 分程度。(1) は値域 $0 < x < 1$ を逆関数の定義域として添えること。(2) は公式を知っていれば早いですが、答案では微分して定数差を示す方法が確実である。上端 $f(b)$ の微分で $g(f(b))f'(b)$ が出る点を省かないこと。

【第 2 問】

2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ に対し、 $s+v$ を X のトレースという。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ と A^2 のトレースがともに -1 であるとする。

(1) $A^3 = E$ を示せ。ただし、 E は単位行列である。(2) 連立 1 次方程式 $(A + E)^4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ を解け。

▶ 解法 1

【方針】

まずトレース条件から $\det A = 1$ を求める。2 次行列では $(\operatorname{tr} A)^2 = \operatorname{tr}(A^2) + 2 \det A$ が成り立つので、これで行列式が分かる。さらに 2 次行列の成分計算で $A^2 + A + E = 0$ を得る。(2) はこの関係から $(A + E)^2 = A$ 、 $(A + E)^4 = A^2$ と簡約する。

【解答】

(1) A のトレースが -1 で、 A^2 のトレースも -1 である。2 次行列を成分で計算すると $(\operatorname{tr} A)^2 = \operatorname{tr} A^2 + 2 \det A$ であるから $1 = -1 + 2 \det A$ より $\det A = 1$ である。したがって成分計算により $A^2 + A + E = 0$ となる。これに $A - E$ を掛けると $A^3 = E$ である。

(2) $A^2 + A + E = 0$ より $(A + E)^2 = A$ である。したがって $(A + E)^4 = A^2$ である。方程式は

$$A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

であり、両辺に A を掛けると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b^2 - ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって $(x, y) = (0, -1)$ である。 $A^2 + A + E = 0$ を得た後の流れを補足する。この式から $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E = A$ である。したがって $(A + E)^4 = A^2$ となる。方程式は $A^2 Cxy = Cb - a$ である。さらに $A^3 = E$ なので両辺に左から A を掛ければ $Cxy = ACb - a$ である。成分計算により $ACb - a = Cab - ab - b^2 - ac = C0 - (ac + b^2)$ 。ここで $\det A = ac + b^2 = 1$ だから $Cxy = C0 - 1$ となる。

▶ 解法 2

【方針】

トレースの一般公式を引用せず、与えられた成分を直接計算して $a+c$ と $ac+b^2$ を求める。そこから $A^2 + A + E = 0$ を成分ごとに確認し、後半を簡約する。

【解答】

A のトレースから

$$a + c = -1. \quad (1)$$

また

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & b(a+c) \\ -b(a+c) & c^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

だから、 A^2 のトレース条件は

$$a^2 + c^2 - 2b^2 = -1. \quad (2)$$

(1) を二乗し、(2) を引くと

$$2ac + 2b^2 = 2, \quad ac + b^2 = 1. \quad (3)$$

(1)

$A^2 + A + E$ の非対角成分は $b(a+c+1)$ とその符号違いなので 0 である。左上成分は

$$a^2 - b^2 + a + 1 = a^2 + a + ac = a(a+c+1) = 0$$

で、右下も同様に 0 である。よって

$$A^2 + A + E = 0.$$

両辺に $A - E$ を掛ければ $A^3 = E$ である。

(2)

$$(A + E)^2 = A, \quad (A + E)^4 = A^2.$$

したがって与式へ左から A を掛けると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(b^2 + ac) \end{pmatrix}.$$

(3) より

$$(x, y) = (0, -1).$$

【総評】 2 次行列のトレースと行列式の関係を使う問題である。所要時間は 18 分程度。 $A^2 + A + E = 0$ が出ると、 $A^3 = E$ だけでなく $(A + E)^4$ も一気に簡約できる。後半では $ac + b^2 = 1$ を最後の成分計算に使うため、行列式の値を忘れずに保持したい。

【第 3 問】

ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。平面に接する面 (底面) の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す、という操作を行う。ただし、どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし、印のついた面が最初は上面にあるとする。この操作を n 回続けて行ったとき、印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n 、底面にくる確率を b_n とおく。

(1) a_2 を求めよ。(2) a_{n+1} と a_n の関係式を導け。(3) b_n を n の式で表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

印のついた面が上面・側面・底面のどれにあるかだけを状態として見る。上面または底面にあるときは次の操作で必ず側面に移り、側面にあるときは 4 本の辺のうち 2 本を選ぶと上面または底面に移り、残り 2 本では側面のままである。この遷移から $a_{n+1} = 1 - a_n/2$ を作り、 b_n は直前に側面にある確率から求める。

【解答】

(1) 1 回倒すと印は必ず側面にくる。2 回目に、印の面を底面または上面にする辺は 2 本、側面のままにする辺は 2 本である。よって $a_2 = \frac{1}{2}$ である。

(2) 印が側面にあるとき、次に側面でなくなる確率は $1/2$ である。印が上面または底面にあるとき、次は必ず側面にくる。したがって $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + (1 - a_n) = 1 - \frac{1}{2}a_n$ である。

(3) $a_1 = 1$ であるから、(2) より $a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。 $n \geq 2$ では、底面にくるには直前に側面にあり、かつその面を下に倒す 1 本を選ぶ必要があるので $b_n = \frac{1}{4}a_{n-1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{6}$ である。

(3) ではまず漸化式 $a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{2}{3}\right)$ と変形する。 $a_1 = 1$ なので $a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

底面に来るには、直前に印の面が側面にあり、その側面を下にする 1 本の辺を選ぶ必要がある。側面にあるとき、4 本の候補のうち底面に移すものは 1 本なので $b_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$ ($n \geq 2$) である。したがって $b_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ ($n \geq 2$) で、 $b_1 = 0$ である。よって極限は $1/6$ となる。

▶ 解法 2

【方針】

上面・側面・底面の確率を 3 成分で持つ状態遷移として書く。遷移行列から側面確率の漸化式と底面確率を同時に読み取る。

【解答】

操作 n 回後に印が上面・側面・底面にある確率をそれぞれ

$$u_n, \quad a_n, \quad b_n$$

とする。側面からは、4 本の軸のうち 1 本ずつで上面・底面へ移り、2 本では側面に残る。上面・底面からは必ず側面へ移る。したがって

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ a_n \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

初期状態は $(u_0, a_0, b_0) = (1, 0, 0)$ である。

(1)

(1) から $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1/2$ である。

(2)

$u_n + a_n + b_n = 1$ より

$$a_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}a_n + b_n = 1 - \frac{1}{2}a_n.$$

(3)

$$a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} \left(a_n - \frac{2}{3} \right)$$

と $a_1 = 1$ から

$$a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

(1) の第 3 行より $b_n = a_{n-1}/4$ ($n \geq 2$) だから

$$b_n = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-2}, \quad b_1 = 0.$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{6}.$$

【総評】 状態を細かい向きではなく、上面・側面・底面の 3 種類に圧縮するのが要点である。所要時間は 15 分程度。 a_{n+1} は側面から側面に残る確率 $1/2$ と、側面以外から必ず側面へ来る事実で決まる。 b_n は a_n からではなく a_{n-1} から求める点に注意する。

【第 4 問】

a と b は $\pm 1, 0$ でない実数とする。実数 x, y が、 $\frac{\sin x}{\sin y} = a, \frac{\cos x}{\cos y} = b$ を満たしているとする。

(1) $\tan^2 y$ を a, b を用いて表せ。(2) 点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

与式は分母が 0 でない比の条件なので、まず $\sin y$ と $\cos y$ が 0 でないことを確認する。 $\sin x = a \sin y, \cos x = b \cos y$ を $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に代入して y だけの式にし、 $\tan^2 y$ の値を求める。最後は、得られた値が正になることと、そのとき実際に x を取れることを確認して、 (a, b) 平面の領域へ直す。

【解答】

(1) 比 $\sin x / \sin y, \cos x / \cos y$ が定義されているので、 $\sin y \neq 0, \cos y \neq 0$ である。与式から $\sin x = a \sin y, \cos x = b \cos y$ であり、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に代入すると $a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y = 1$ となる。ここで $\tan^2 y = T$ とおくと、 $\sin^2 y = T/(1+T), \cos^2 y = 1/(1+T)$ であるから $\frac{a^2 T + b^2}{1+T} = 1$ である。したがって $(a^2 - 1)T = 1 - b^2$ より $\tan^2 y = \frac{1-b^2}{a^2-1}$ を得る。

(2) 問題の条件より a, b は $0, \pm 1$ でないから、上の右辺は 0 ではない。実数 y が存在するには $\tan^2 y > 0$ が必要十分である。よって $\frac{1-b^2}{a^2-1} > 0$ であり、分子と分母の符号が同じになればよい。したがって

$$\begin{cases} a^2 > 1, \\ b^2 < 1, \\ \text{または} \\ a^2 < 1, \\ b^2 > 1 \end{cases}$$

である。すなわち求める範囲は $|a| > 1, |b| < 1$ または $|a| < 1, |b| > 1$ である。

この条件が十分であることも確認しておく。右辺が正なら、その値を T として $\tan^2 y = T$ を満たす y を取れる。このとき $a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y = 1$ なので、 $(a \sin y, b \cos y)$ は単位円上の点であり、これを $(\sin x, \cos x)$ とする実数 x が存在する。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は平方和から $\tan^2 y$ を求める。(2) は 1 が a^2 と b^2 の正の重み付き平均であることを使い、存在範囲を一行で判定する。

【解答】

(1)

$$\sin x = a \sin y, \quad \cos x = b \cos y$$

を平方して加えると

$$a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y = 1.$$

$\sin y, \cos y \neq 0$ であり、 $T = \tan^2 y$ と置けば

$$\frac{a^2 T + b^2}{1 + T} = 1.$$

よって

$$\tan^2 y = \frac{1 - b^2}{a^2 - 1}.$$

(2)

上の平方和は

$$1 = a^2 \sin^2 y + b^2 \cos^2 y$$

であり、 $\sin^2 y, \cos^2 y$ はともに正で和が 1 である。したがって 1 は a^2, b^2 の間に厳密に入る。すなわち

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) < 0.$$

逆にこの条件なら 1 を a^2, b^2 の正の重み付き平均として表せ、その重みを $\sin^2 y, \cos^2 y$ とする y が取れる。対応する $(a \sin y, b \cos y)$ は単位円上にあるので x も存在する。

よって求める領域は

$$|a| > 1, |b| < 1 \quad \text{または} \quad |a| < 1, |b| > 1$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 18 分。三角比の比をそのまま扱うより、 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ へ代入して y だけにするのが最短である。得点差がつくのは、 $\sin y, \cos y$ が 0 でないこと、 $a, b \neq \pm 1$ により右辺が 0 にならないこと、さらに存在条件が単なる不等号ではなく x の存在まで保証していることを確認する部分である。 (a, b) 平面では、片方だけが絶対値 1 を超える 2 つの領域になる。

【第 5 問】

x の方程式 $x^2 + a|x - 1| + b = 0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき、点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値の中身で $x < 1$ と $x \geq 1$ に分け、2 つの上に開く放物線をそれぞれ担当区間だけで数える。共通端点 $x = 1$ の値はどちらも $1 + b$ であり、左側は端点を含まず、右側は端点を含む。この違いを反映させて、頂点の位置 $a/2$, $-a/2$ と最小値の符号から根の個数を表にし、合計がちょうど 2 個になる条件を整理する。

【解答】

$x < 1$ では $F_-(x) = x^2 - ax + a + b$ を、 $x \geq 1$ では $F_+(x) = x^2 + ax + b - a$ を調べればよい。どちらも $x = 1$ での値は $F_-(1) = F_+(1) = 1 + b$ である。ただし左側は $x < 1$ なので $x = 1$ を含まず、右側は $x \geq 1$ なので $x = 1$ を含む。

左側の放物線 F_- の頂点は $x = a/2$ 、最小値は

$$F_-\left(\frac{a}{2}\right) = a + b - \frac{a^2}{4} = b - \left(\frac{a^2}{4} - a\right)$$

である。右側の放物線 F_+ の頂点は $x = -a/2$ 、最小値は

$$F_+\left(-\frac{a}{2}\right) = b - a - \frac{a^2}{4} = b - \left(\frac{a^2}{4} + a\right)$$

である。

まず $-2 < a < 2$ のとき、2 つの頂点はそれぞれ担当区間の内側または端点側に位置し、左側は $b < a^2/4 - a$ のときに根を持つ。さらに $b < -1$ なら左側に 1 個、右側に 1 個、 $-1 < b < a^2/4 - a$ なら左側に 2 個、右側に 0 個となる。したがって、この範囲ではまとめて $b < \frac{a^2}{4} - a$ が条件である。 $a = -2$ のときは $a^2/4 - a = 3$ である。 $-1 < b < 3$ では左側に 2 個、 $b \leq -1$ では左側と右側に 1 個ずつ根を持つ。 $b = 3$ では左側の頂点で接する 1 個だけになるので、条件は $b < 3$ である。 $a < -2$ のとき、左側で 2 個の根を持つには $\frac{a^2}{4} + a < b < \frac{a^2}{4} - a$ が必要で、このとき右側には根がない。また $b < -1$ では左側に 1 個、右側に 1 個の根を持つ。 $b = -1$ では $x = 1$ が右側の根として数えられるため個数が変わり、ちょうど 2 個にはならない。よって $b < -1$ または $\frac{a^2}{4} + a < b < \frac{a^2}{4} - a$ である。 $a \geq 2$ のとき、左側は単調に下がりながら $x = 1$ に近づき、右側は $x = 1$ から単調に上がる。したがって $b < -1$ のときだけ左側に 1 個、右側に 1 個の根を持つ。 $b = -1$ では右側の端点 $x = 1$ の 1 個だけなので除く。

以上より、異なる実数解がちょうど 2 個となる条件は

$$\begin{cases} -2 < a < 2, & b < \frac{a^2}{4} - a, \\ a = -2, & b < 3, \\ a < -2, & b < -1 \text{ または } \frac{a^2}{4} + a < b < \frac{a^2}{4} - a, \\ a \geq 2, & b < -1. \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

方程式を $b = \phi_a(x)$ という水平線との交点問題に直す。 $x = 1$ の左右にある 2 本の下向き放物線について、端点値と頂点値を比較し、交点数の表から 2 個となる範囲を読む。

【解答】

方程式を

$$b = -x^2 - a|x - 1| =: \phi_a(x)$$

と書く。 $x < 1$ と $x \geq 1$ では

$$\phi_a(x) = \begin{cases} -x^2 + ax - a & (x < 1), \\ -x^2 - ax + a & (x \geq 1). \end{cases}$$

どちらも $x = 1$ で -1 となるが、左側は端点を含まず、右側は含む。

左枝の頂点は $x = a/2$ 、高さは

$$M_- = \frac{a^2}{4} - a,$$

右枝の頂点は $x = -a/2$ 、高さは

$$M_+ = \frac{a^2}{4} + a.$$

担当区間に頂点が入るかを合わせると、水平線 $y = b$ との交点数は次の条件でちょうど 2 個になる。

a の範囲	b の条件
$a < -2$	$b < -1$ または $M_+ < b < M_-$
$a = -2$	$b < 3$
$-2 < a < 2$	$b < M_-$
$a \geq 2$	$b < -1$

したがって

$$\begin{cases} a < -2: & b < -1 \text{ または } \frac{a^2}{4} + a < b < \frac{a^2}{4} - a, \\ a = -2: & b < 3, \\ -2 < a < 2: & b < \frac{a^2}{4} - a, \\ a \geq 2: & b < -1. \end{cases}$$

境界 $b = -1$ と頂点高では重根または端点根により個数が変わるため、表の等号条件が必要である。

【総評】 難度 8、計算量 8。目安時間は 32 分。絶対値を外したあと、判別式だけで済ませると担当区間から外れた根を数えてしまう。 $x = 1$ を左側では含まず右側では含むこと、 $b = -1$ の端点根、 $a = \pm 2$ の頂点が端点に来る場合が主な失点箇所である。答案では、左側・右側それぞれの根の個数を先に決めてから合計 2 個に絞ると、境界の等号を整理しやすい。

【第 6 問】

(1) 点 $P(p, q)$ と円 $C : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($r > 0$) との距離 d とは、 P と C 上の点 (x, y) との距離の最小値をいう。 P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて、 d を表す式を求めよ。(2) 2 つの円 $C_1 : (x + 4)^2 + y^2 = 81$ と $C_2 : (x - 4)^2 + y^2 = 49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は点から円までの最短距離を、中心から点までの距離と半径の差の絶対値として表す。(2) では 2 つの円の中心を焦点とみなし、距離を D_1, D_2 とおいて $|D_1 - 9| = |D_2 - 7|$ を解く。絶対値を外すと、和一定の楕円と差一定の双曲線に分かれるので、焦点間距離から標準形を出し、双曲線はどちらの枝かまで決める。

【解答】

(1) 円の中心を $C = (a, b)$ とし、点 $P = (p, q)$ と中心との距離を $D = \sqrt{(p - a)^2 + (q - b)^2}$ とおく。点 P が円の外部にあるとき、円周までの最短距離は中心方向に進んだときに得られるので $d = D - r$ である。点 P が円の内部にあるときは、円周まで出る距離が $d = r - D$ である。したがって、一般に $d = |D - r|$ と表せる。

(2) 2 つの円の中心を $(-4, 0), (4, 0)$ とし、点 (x, y) からそれぞれの中心までの距離を $D_1 = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2}$, $D_2 = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$ とおく。(1) より、2 つの円からの距離が等しい条件は $|D_1 - 9| = |D_2 - 7|$ である。絶対値を外すと $D_1 - 9 = D_2 - 7$ または $D_1 - 9 = -(D_2 - 7)$ であるから、 $D_1 - D_2 = 2$ または $D_1 + D_2 = 16$ となる。 $D_1 + D_2 = 16$ は、焦点 $(-4, 0), (4, 0)$ をもつ楕円である。長半径は 8、焦点距離は 4 なので、短半径の 2 乗は $8^2 - 4^2 = 48$ である。よって $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ を得る。 $D_1 - D_2 = 2$ は、同じ焦点をもつ双曲線である。距離の差が 2 なので $2A = 2$ 、すなわち $A = 1$ であり、焦点距離 4 から $B^2 = 4^2 - 1^2 = 15$ である。したがって標準形は $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ である。さらに $D_1 - D_2 = 2 > 0$ だから、点は右側の焦点 $(4, 0)$ に近い枝にあり、 $x \geq 1$ である。

以上より、求める軌跡は $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ および $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ ($x \geq 1$) である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は三角不等式とその等号条件で最短距離を証明する。(2) は中心までの距離を D_1, D_2 とし、絶対値方程式を和一定・差一定へ分ける。

【解答】

(1)

円の中心を $M = (a, b)$ 、 $MP = D$ とする。円上の任意の点 X について三角不等式から

$$PX \geq |PM - MX| = |D - r|.$$

直線 PM と円の交点のうち P に近い方を取れば等号が成り立つ。したがって

$$d = \begin{cases} D - r & (P \text{ が外部}), \\ r - D & (P \text{ が内部}) \end{cases}$$

である。

(2)

$$D_1 = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2}, \quad D_2 = \sqrt{(x - 4)^2 + y^2}$$

とすると

$$|D_1 - 9| = |D_2 - 7|.$$

よって

$$D_1 + D_2 = 16 \quad \text{または} \quad D_1 - D_2 = 2.$$

前者は焦点 $(\pm 4, 0)$ 、長半径 8 の楕円なので

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

後者は実半径 1、焦点距離 4 の双曲線の右枝なので

$$x^2 - \frac{y^2}{15} = 1, \quad x \geq 1.$$

どちらも元の絶対値方程式へ戻して成立するため、求める軌跡はこの和集合である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25 分。円からの距離を $|D - r|$ と表せれば、後半は焦点をもつ標準的な軌跡問題に変わる。注意点は、絶対値方程式から和一定と差一定の 2 種類が出ること、楕円の短半径 $64 - 16$ 、双曲線の $16 - 1$ を取り違えないこと、そして双曲線では右枝だけを残すことである。