

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 1999 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{2n+3}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義されている. 数列 $\{b_n\}$ が, ある定数 c により $b_n = (n+c)a_n$ で定義され, $b_{n+1} - b_n = pa_n$ をみたすとする.

(1) 定数 c, p の値を求めよ. (2) $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ を n を用いて表せ. (3) $b_n \leq \frac{3}{2\sqrt{n}}$ であることを証明せよ. (4) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とするとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ.

第 2 問

1 辺の長さが 2 の正四面体 $ABCD$ がある. G を $\triangle BCD$ の重心, H を $\triangle ACD$ の重心とし, 直線 AG と BH の交点を O とする.

(1) ベクトル $\overrightarrow{AO}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ. (2) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$ を求めよ. (3) 点 P がこの四面体の面上を動くとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ のとりうる値の範囲を求めよ.

第 3 問

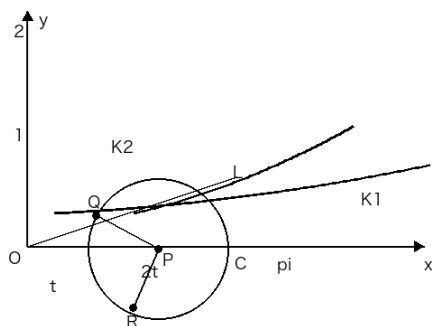
1 から n までの番号をつけた n 枚のカードがある. これら n 枚のカードを A , B , C の 3 つの箱に分けて入れる. ただし, どの箱にも少なくとも 1 枚は入れるものとする.

(1) 入れ方は全部で何通りあるか. (2) 自然数 l は $2l \leq n$ をみたすとする. $1 \leq k \leq l$ である各整数 k について $2k-1$ と $2k$ の番号のカードをペアと考える. どれかの箱に少なくとも 1 つのペアが入る場合の数を n と l を用いて表せ.

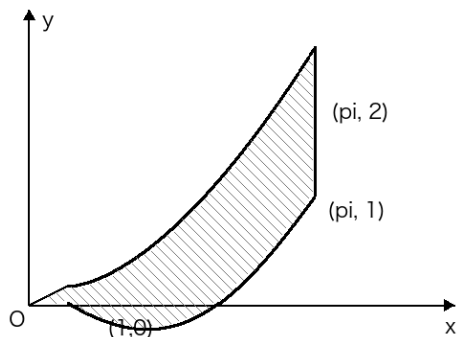
第 4 問

原点を中心として回転する半直線 L と L に接しながら動く半径 1 の円 C がある．時刻 $t = 0$ では，半直線 L は y 軸の負の部分に一致しており，円 C は中心が $(1, 0)$ にあって原点で L に接しているとする．時刻 t では，半直線 L は原点を中心にして正の向きに t だけ回転し， C は L 上を滑らずにころがって原点から $2t$ の距離の点 R で L に接しているとする．円の中心を P とする．点 Q は C の周上の定点で $t = 0$ では原点にあるとする．

(1) 時刻 t での P と Q の座標を媒介変数 t で表せ．(2) t が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くときの P の軌跡を K_1 とし， Q の軌跡を K_2 とする． $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分， $(\pi, 1)$ と $(\pi, 2)$ を結ぶ線分および K_1 と K_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．



$OR = 2t$



第 5 問

(1) 実数を成分とする 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が, ある実数 p, q ($q \neq 0$) について,

$A^3 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$ をみたせば $a = d, b = -c$ であることを示せ. (2) 実数を成分とする 2 次正

方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ で, $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ をみたすものをすべて求めよ.

第 6 問

C を底面が半径 2 の円で高さが 6 の直円錐（すい）とし，これを xyz 空間に頂点が原点 $O(0, 0, 0)$ で底面の中心が $A(0, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ となるようにおく． C の表面のうち底面と頂点以外の部分を側面と呼ぶ．

- (1) $P(a, b, c)$ を C の側面の点とする． P から線分 OA におろした垂線の長さを b, c で表せ．
(2) c を $0 < c \leq 2$ をみたす定数とする． (x, y, c) が C の表面かまたは内部の点であることを表す x と y による不等式を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)