

# 東北大学 1999 年度 理系（後期）

## 解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

### 【第 1 問】

数列  $\{a_n\}$  が

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n}{2n+3}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定義されている。数列  $\{b_n\}$  が、ある定数  $c$  により  $b_n = (n+c)a_n$  で定義され、 $b_{n+1} - b_n = pa_n$  をみたすとする。

(1) 定数  $c, p$  の値を求めよ。(2)  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  を  $n$  を用いて表せ。(3)  $b_n \leq \frac{3}{2\sqrt{n}}$  であることを証明せよ。(4)  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

まず  $b_n = (n+c)a_n$  を漸化式に代入し、 $b_{n+1} - b_n$  が  $a_n$  の定数倍になるように  $c$  を決める。(2) では決まった  $b_n$  の比を直接計算する。(3) は  $b_{n+1}/b_n = 2n/(2n+1)$  を  $\sqrt{n/(n+1)}$  で上から評価し、積をとって示す。(4) は (1) の階差式  $b_{n+1} - b_n = -a_n/2$  を和にして  $S_n = 2(b_1 - b_{n+1})$  とし、(3) から  $b_n \rightarrow 0$  を使う。

#### 【解答】

(1)  $b_n = (n+c)a_n$  であり、 $a_{n+1} = \frac{2n}{2n+3}a_n$  だから

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (n+1+c)a_{n+1} - (n+c)a_n \\ &= (n+1+c)\frac{2n}{2n+3}a_n - (n+c)a_n \\ &= \frac{2n(n+1+c) - (n+c)(2n+3)}{2n+3}a_n \\ &= -\frac{n+3c}{2n+3}a_n. \end{aligned}$$

これがすべての  $n$  で  $pa_n$  に等しいためには  $\frac{n+3c}{2n+3}$  が  $n$  によらない定数でなければならない。そこで  $n+3c = \lambda(2n+3)$

とおくと、係数比較より  $1 = 2\lambda$ ,  $3c = 3\lambda$  である。したがって  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{1}{2}$  である。このとき  $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2}a_n$

だから  $c = \frac{1}{2}$ ,  $p = -\frac{1}{2}$  である。

(2)  $b_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)a_n$  であるから

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{n + \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \frac{n + \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2}} \cdot \frac{2n}{2n+3} \\ &= \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n+3} \\ &= \frac{2n}{2n+1}. \end{aligned}$$

(3)  $b_1 = (1 + 1/2)a_1 = 3/2$  である。また (2) より  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n}{2n+1}$  である。ここで  $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 \leq \frac{n}{n+1}$  を確認する。両

辺は正であり、両辺に  $(2n+1)^2(n+1)$  を掛けると  $4n^2(n+1) \leq n(2n+1)^2$  すなわち  $4n^3 + 4n^2 \leq 4n^3 + 4n^2 + n$  となり、これは明らかに成り立つ。したがって  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \sqrt{\frac{n}{n+1}}$  である。

これを  $1, 2, \dots, n-1$  について掛けると

$$\frac{b_n}{b_1} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \cdots \sqrt{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

である。よって  $b_n \leq \frac{3}{2\sqrt{n}}$  が成り立つ。

(4) (1) より  $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2}a_n$  である。したがって  $a_n = 2(b_n - b_{n+1})$  であり、和をとると

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= 2\{(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1})\} \\ &= 2(b_1 - b_{n+1}). \end{aligned}$$

(3) より  $0 < b_{n+1} \leq \frac{3}{2\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$  であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2b_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

まず  $b_n$  の比を求め、 $nb_n^2$  が減少することを直接示す。和は階差を使って望遠和にする。

### 【解答】

(1)

$$b_{n+1} - b_n = \left\{ \frac{2n(n+1+c)}{2n+3} - (n+c) \right\} a_n.$$

分子の  $n$  の係数が消える条件から

$$c = \frac{1}{2}, \quad p = -\frac{1}{2}.$$

(2)

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+3/2}{n+1/2} \frac{2n}{2n+3} = \frac{2n}{2n+1}.$$

(3)

$$\frac{(n+1)b_{n+1}^2}{nb_n^2} = \frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} < 1.$$

したがって  $nb_n^2 \leq b_1^2 = 9/4$ 。  $b_n > 0$  より

$$b_n \leq \frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

(4)

(1) から  $a_n = 2(b_n - b_{n+1})$ 。 よって

$$S_n = 2(b_1 - b_{n+1}).$$

(3) より  $b_{n+1} \rightarrow 0$  なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2b_1 = 3.$$

【総評】 補助数列をうまく選んで階差和にする誘導問題である。目安時間は 18 分程度。(1) で  $c$  を決める計算が全体の入口で、 $b_{n+1} - b_n$  の係数が  $n$  に依存しないという条件を係数比較に直せばよい。(3) は比の評価を積み重ねる典型で、平方して確認すると安全である。(4) は  $a_n = 2(b_n - b_{n+1})$  と見抜けば望ましい形に望遠和が消える。

### 【第 2 問】

1 辺の長さが 2 の正四面体  $ABCD$  がある。  $G$  を  $\triangle BCD$  の重心、  $H$  を  $\triangle ACD$  の重心とし、直線  $AG$  と  $BH$  の交点を  $O$  とする。

(1) ベクトル  $\vec{AO}$  をベクトル  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  を用いて表せ。(2)  $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO}$  を求めよ。(3) 点  $P$  がこの四面体の面上を動くとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$  のとりうる値の範囲を求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

正四面体の各面の重心をベクトルで表し、直線  $AG$  と  $BH$  の交点が 4 頂点の重心であることを確認する。(1)(2) はその重心表示からすぐに出る。(3) は点  $O$  を基準にして  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$  を展開し、一次の項が (2) により消えることを使う。あとは、点  $P$  が四面体の面上を動くときの  $OP^2$  の最小値と最大値を、面への垂線の足と頂点で求める。

#### 【解答】

(1)  $G$  は  $\triangle BCD$  の重心であるから

$$\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{3}$$

である。四面体の 4 頂点の重心を  $O$  とすれば

$$\vec{AO} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}}{4}$$

であり、この点は直線  $AG$  上にある。

また、 $H$  は  $\triangle ACD$  の重心なので、同じ点  $O$  は直線  $BH$  上にもある。したがって、問題の交点  $O$  は四面体の重心である。よって

$$\vec{AO} = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$$

である。

(2)  $O$  は 4 頂点の重心であるから、 $O$  を基準にした 4 つの位置ベクトルの和は 0 である。すなわち

$$\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} + \vec{DO} = \vec{0}$$

である。

(3)  $O$  を原点とする位置ベクトルで考える。各頂点の位置ベクトルを  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 、点  $P$  の位置ベクトルを  $\vec{p}$  とすると、(2) より  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$  である。したがって

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 &= |\vec{p} - \vec{a}|^2 + |\vec{p} - \vec{b}|^2 + |\vec{p} - \vec{c}|^2 + |\vec{p} - \vec{d}|^2 \\ &= 4|\vec{p}|^2 + |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ &= 4OP^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2. \end{aligned}$$

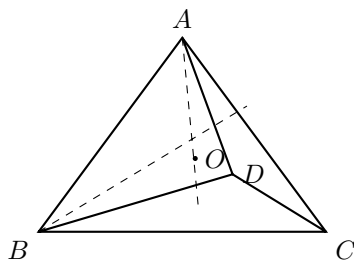
正四面体の 1 辺は 2 である。正四面体の高さは  $\sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$  であり、重心は頂点から底面への中線を 3 : 1 に分ける。したがって  $OA = OB = OC = OD = \frac{3}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$  であるから  $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = \frac{3}{2}$  である。よって  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4OP^2 + 6$  となる。

点  $P$  が面上を動くとき、 $OP$  の最小は、 $O$  からいずれかの面へ下ろした垂線の足で起こる。その距離は高さの  $1/4$  なので

$$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

である。一方、面上で  $OP$  が最大となるのは頂点であり、 $OP^2 = OA^2 = \frac{3}{2}$  である。

したがって  $4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \leq AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 \leq 4 \cdot \frac{3}{2} + 6$  より、求める範囲は  $\frac{20}{3} \leq AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 \leq 12$  である。



## ▶ 解法 2

### 【方針】

正四面体を重心が原点になる対称な 4 座標で表す。距離平方和は重心まわりの恒等式で処理する。

### 【解答】

(1)

4 頂点の重心を  $O$  とすれば

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

面の重心を結ぶ 2 本の中線  $AG, BH$  はこの点を通るので、問題の  $O$  はこの重心である。

(2)

重心の定義から

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \mathbf{0}.$$

(3)

$O$  を原点として

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1), & B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, -1), \\ C &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, -1), & D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

と置ける。各辺長は 2 で、各頂点までの距離平方は  $3/2$  である。任意の  $P$  について

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 4OP^2 + 6.$$

面上で  $OP^2$  の最小は面の中心で  $1/6$ 、最大は頂点で  $3/2$  である。よって

$$\frac{20}{3} \leq AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 \leq 12.$$

【総評】 四面体の重心をベクトルで扱う標準的な空間図形問題である。目安時間は 18 分程度。(1)(2) は重心の位置ベクトルを正しく書ければ短い。(3) では平方和を展開したときに一次の項が消えることが中心で、ここを説明すると答案の見通しがよくなる。最小値は面への垂線の足、最大値は頂点で起こるため、重心から面までの距離と重心から頂点までの距離を区別して計算する。

### 【第 3 問】

1 から  $n$  までの番号をつけた  $n$  枚のカードがある。これら  $n$  枚のカードを  $A, B, C$  の 3 つの箱に分けて入れる。ただし、どの箱にも少なくとも 1 枚は入れるものとする。

(1) 入れ方は全部で何通りあるか。(2) 自然数  $l$  は  $2l \leq n$  をみたすとする。 $1 \leq k \leq l$  である各整数  $k$  について  $2k-1$  と  $2k$  の番号のカードをペアと考える。どれかの箱に少なくとも 1 つのペアが入る場合の数を  $n$  と  $l$  を用いて表せ。

#### ▶ 解法 1

##### 【方針】

(1) は各カードを 3 箱へ入れる全体から、空箱がある場合を包除原理で除く。(2) は求める事象を直接数えるより、どのペアも同じ箱に入らない余事象を数える。まず空箱条件を無視すれば、各ペアは 2 枚を異なる箱に入れるので  $3 \cdot 2$  通り、残りのカードは自由である。そこから、空箱が 1 つある場合を引いて、非空条件を満たす余事象を得る。最後に (1) から引く。

##### 【解答】

(1) 各カードは  $A, B, C$  の 3 つの箱のいずれかに入るので、空箱を許せば  $3^n$  通りである。

少なくとも 1 つの箱が空である場合を引く。ある 1 つの箱を空にする方法は 3 通りで、そのとき各カードは残り 2 箱のどちらかに入るので  $2^n$  通りである。ただし、2 つの箱が空である場合、つまり全カードが 1 つの箱に入る場合は二重に引かれている。これは 3 通りである。したがって、どの箱にも少なくとも 1 枚入る入れ方は  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$  通りである。

(2) (1) で数えた入れ方のうち、どれかの箱に少なくとも 1 つのペアが入る場合を求める。余事象として、「どのペアも同じ箱に入らない」場合を数える。

まず空箱条件を考えない。各ペア  $(2k-1, 2k)$  について、2 枚を異なる箱に入れる方法は  $3 \cdot 2 = 6$  通りである。ペアは  $l$  個あるので  $6^l$  通りであり、残りの  $n - 2l$  枚は自由に 3 箱へ入れられるので  $6^l 3^{n-2l}$  通りである。

この中から、空箱があるものを除く。例えば箱  $A$  が空であるとする。このとき各ペアの 2 枚は、箱  $B, C$  に 1 枚ずつ入らなければならないので、各ペアについて 2 通りである。また、残りの  $n - 2l$  枚は箱  $B, C$  のどちらかに入るので  $2^{n-2l}$  通りである。したがって、指定した 1 つの箱が空で、かつどのペアも同じ箱に入らない場合は  $2^l 2^{n-2l} = 2^{n-l}$  通りである。空にする箱は 3 通りある。

2 つの箱が空である場合は、ペアの 2 枚を異なる箱に入れることができないため起こらない。よって、どのペアも同じ箱に入らず、かつ 3 箱すべてが非空である入れ方は  $6^l 3^{n-2l} - 3 \cdot 2^{n-l}$  通りである。

したがって求める場合の数は、(1) からこの余事象を引いて  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3 - 6^l 3^{n-2l} + 3 \cdot 2^{n-l}$  である。

#### ▶ 解法 2

##### 【方針】

ペアが同じ箱に入る事象について包含排除を直接行う。選んだペアを 1 枚の超カードとみなす。

##### 【解答】

(1)

包除原理より、3 箱すべてを使う入れ方は

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

(2)

$j$  個の指定したペアがそれぞれ同じ箱に入るとする。この  $j$  ペアを各 1 個のまとまりと見れば、独立な対象は  $n - j$  個である。3 箱すべてを使う入れ方は

$$3^{n-j} - 3 \cdot 2^{n-j} + 3.$$

したがってペア事象の包含排除により求める数は

$$\sum_{j=1}^l (-1)^{j+1} {}_l C_j (3^{n-j} - 3 \cdot 2^{n-j} + 3).$$

二項展開で整理すると

$$\begin{aligned} 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 - 2^l 3^{n-l} + 3 \cdot 2^{n-l}. \\ 2^l 3^{n-l} = 6^l 3^{n-2l} \end{aligned}$$

だから

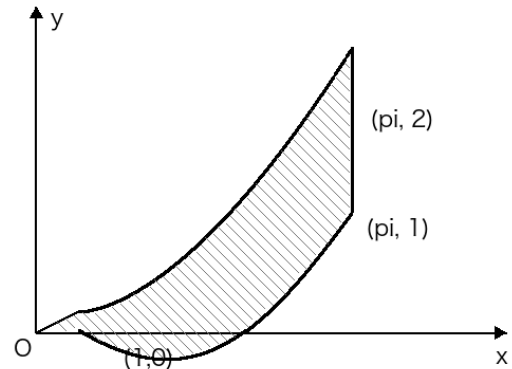
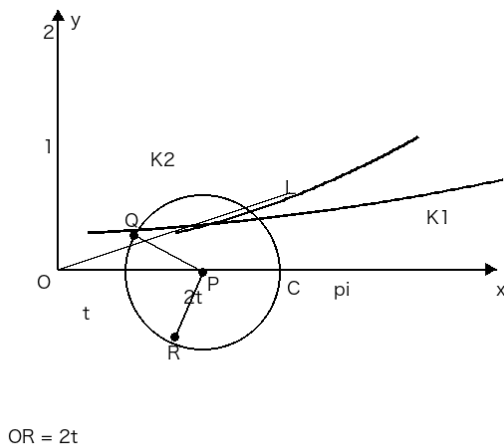
$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3 - 6^l 3^{n-2l} + 3 \cdot 2^{n-l}.$$

【総評】 箱への分配を包除原理で扱う問題である。目安時間は 16 分程度。(1) は標準的な非空箱の数え上げである。(2) は「少なくとも 1 つのペアが同じ箱」を直接数えると重複が複雑になるため、どのペアも同じ箱に入らない余事象を使うのが自然である。空箱禁止条件を最後まで維持する必要がある、余事象を数えたあとに空箱 1 つの場合を引く点が得点差になりやすい。

#### 【第 4 問】

原点を中心として回転する半直線  $L$  と  $L$  に接しながら動く半径 1 の円  $C$  がある。時刻  $t=0$  では、半直線  $L$  は  $y$  軸の負の部分に一致しており、円  $C$  は中心が  $(1, 0)$  にあって原点で  $L$  に接しているとする。時刻  $t$  では、半直線  $L$  は原点を中心に正の向きに  $t$  だけ回転し、 $C$  は  $L$  上を滑らずにころがって原点から  $2t$  の距離の点  $R$  で  $L$  に接しているとする。円の中心を  $P$  とする。点  $Q$  は  $C$  の周上の定点で  $t=0$  では原点にあるとする。

(1) 時刻  $t$  での  $P$  と  $Q$  の座標を媒介変数  $t$  で表せ。(2)  $t$  が 0 から  $\frac{\pi}{2}$  まで動くときの  $P$  の軌跡を  $K_1$  とし、 $Q$  の軌跡を  $K_2$  とする。(0, 0) と  $(1, 0)$  を結ぶ線分、 $(\pi, 1)$  と  $(\pi, 2)$  を結ぶ線分および  $K_1$  と  $K_2$  で囲まれる部分の面積を求めよ。



#### ▶ 解法 1

##### 【方針】

時刻  $t$  の半直線の単位方向を  $(\sin t, -\cos t)$  とし、接点  $R$  を原点から距離  $2t$  の点として表す。円の中心  $P$  は、そこから半径方向  $(\cos t, \sin t)$  に 1 だけ移した点である。円周上の固定点  $Q$  は、半直線自体の回転と、滑らずにころがることによる回転を合わせて半径方向が  $(\cos 3t, \sin 3t)$  だけ変わると見て座標化する。面積は媒介変数表示の面積公式で、 $K_2$ 、端の縦線、 $K_1$  を境界とする閉曲線として計算する。

##### 【解答】

(1) 時刻  $t$  における半直線  $L$  の向きは、初めに負の  $y$  軸方向であり、正の向きに  $t$  だけ回転しているので  $(\sin t, -\cos t)$  である。接点  $R$  は原点からこの向きに距離  $2t$  だけ進んだ点だから  $R = (2t \sin t, -2t \cos t)$  である。

円の中心  $P$  は、接点  $R$  から半直線に垂直な向きに半径 1 だけ離れている。時刻  $t$  でその向きは  $(\cos t, \sin t)$  であるから  $P = (2t \sin t + \cos t, -2t \cos t + \sin t)$  である。

次に  $Q$  を求める。円は半直線上を滑らずにころがり、接点は半直線上を距離  $2t$  だけ進んでいる。半径が 1 なので、ころがりによる円の回転角は  $2t$  である。さらに半直線自体が  $t$  だけ回転しているため、初期に中心から  $Q$  へ向かう半径方向は、全体として角  $3t$  だけ回転した向きになる。初期には  $P = (1, 0)$ 、 $Q = (0, 0)$  なので、中心から  $Q$  へのベクトルは初め  $(-1, 0)$  である。したがって時刻  $t$  では  $\overrightarrow{PQ} = (-\cos 3t, -\sin 3t)$  である。

よって  $Q = (2t \sin t + \cos t - \cos 3t, -2t \cos t + \sin t - \sin 3t)$  である。

(2)  $P(t) = (X_1(t), Y_1(t))$ 、 $Q(t) = (X_2(t), Y_2(t))$  とおく。境界は、 $Q(t)$  を  $t=0$  から  $\pi/2$  まで動かした曲線、縦線  $(\pi, 2)$  から  $(\pi, 1)$ 、 $P(t)$  を  $t=\pi/2$  から 0 へ戻る曲線、横線  $(1, 0)$  から  $(0, 0)$  である。

媒介変数表示の面積公式を用いる。まず 2 つの曲線部分の寄与を計算すると

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \{X_2 Y_2' - Y_2 X_2' - (X_1 Y_1' - Y_1 X_1')\} dt$$

である。ここに (1) の式を代入して整理すると

$$\int_0^{\pi/2} \left( 4t \sin 2t - \cos 2t + \frac{3}{2} \right) dt$$

となる。

さらに、右端の縦線  $(\pi, 2)$  から  $(\pi, 1)$  への寄与は、面積公式で  $-\frac{\pi}{2}$  であり、左端の横線の寄与は 0 である。したがって求める面積は

$$\int_0^{\pi/2} \left( 4t \sin 2t - \cos 2t + \frac{3}{2} \right) dt - \frac{\pi}{2}$$

である。

部分積分により

$$\int_0^{\pi/2} 4t \sin 2t dt = \pi$$

であり、

$$\int_0^{\pi/2} -\cos 2t dt = 0, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{3}{2} dt = \frac{3\pi}{4}$$

である。よって面積は  $\pi + 0 + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$  である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

境界を一周する向きに沿って、媒介曲線の面積公式

$$\int x dy$$

を用いる。2 曲線の差は三角関数の積へ整理できる。

### 【解答】

(1)

半直線方向は  $(\sin t, -\cos t)$ 、その左法線方向は  $(\cos t, \sin t)$  である。接点は

$$R = 2t(\sin t, -\cos t)$$

なので

$$P = (2t \sin t + \cos t, -2t \cos t + \sin t).$$

滑らずに転がる固定半径の方向は  $3t$  回転するから

$$Q = P - (\cos 3t, \sin 3t).$$

(2)

$P = (X_1, Y_1)$ 、 $Q = (X_2, Y_2)$  とする。境界を

$$P(0) \rightarrow P(\pi/2) \rightarrow Q(\pi/2) \rightarrow Q(0) \rightarrow P(0)$$

とたどる。右端の線分は  $x = \pi$ 、左端は  $y = 0$  だから、符号付き面積は

$$\int_0^{\pi/2} (X_1 Y_1' - X_2 Y_2') dt + \pi.$$

$$X_2 = X_1 - \cos 3t, \quad Y_2' = Y_1' - 3 \cos 3t$$

を用いると

$$X_1 Y_1' - X_2 Y_2' = \cos 3t(8t \sin t + 2 \cos t - 3 \cos 3t).$$

積和公式と部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 8t \sin t \cos 3t \, dt &= -\frac{3\pi}{2}, \\ \int_0^{\pi/2} 2 \cos t \cos 3t \, dt &= 0, \\ \int_0^{\pi/2} -3 \cos^2 3t \, dt &= -\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

したがって符号付き面積は

$$-\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + \pi = -\frac{5\pi}{4}.$$

境界の向きが時計回りなので、求める面積はその絶対値

$$\frac{5\pi}{4}$$

である。

**【総評】** 転がる円の固定点を媒介変数で追う難問である。目安時間は 30 分以上。座標化では、半直線の向き、中心への法線方向、円の回転角を別々に管理する必要がある。特に固定点  $Q$  では、接点が距離  $2t$  進むことによる回転と半直線自体の回転を合わせて  $3t$  が現れる。面積計算は式が長いので、閉曲線の向きを決めてから媒介変数表示の面積公式を使うと符号を確認しやすい。

### 【第 5 問】

(1) 実数を成分とする 2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が、ある実数  $p, q$  ( $q \neq 0$ ) について、 $A^3 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$  をみたせば  $a = d, b = -c$  であることを示せ。(2) 実数を成分とする 2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  で、 $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  をみたすものをすべて求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

(1) は 2 次正方行列の恒等式  $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = O$  を成分計算として用いる。これにより  $A^3$  は  $A$  と単位行列の一次結合で表される。 $A^3$  が非実数に対応する形で、右上成分  $q \neq 0$  をもつため、その一次結合の係数は 0 ではなく、 $A$  自身も同じ形になる。(2) は行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  を複素数  $a - bi$  に対応させ、 $(a - bi)^3 = 2 - 2i$  の 3 つの解を求める。

#### 【解答】

(1) 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

について、直接計算により  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = O$  が成り立つ。これに  $A$  を掛けると  $A^3 = (a+d)A^2 - (ad-bc)A$  であり、さらに  $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I$  を代入して  $A^3 = ((a+d)^2 - (ad-bc))A - (a+d)(ad-bc)I$  となる。

ここで  $\lambda = (a+d)^2 - (ad-bc)$  とおく。もし  $\lambda = 0$  なら、上式より  $A^3$  は単位行列の実数倍になり、右上成分は 0 になる。しかし問題では

$$A^3 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}, \quad q \neq 0$$

なので、これは不可能である。したがって  $\lambda \neq 0$  である。

上式から  $A = \frac{1}{\lambda} \{A^3 + (a+d)(ad-bc)I\}$  である。右辺は

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$$

と単位行列の一次結合だから、対角成分が等しく、左下成分が右上成分の符号反対である形を保つ。したがって  $a = d, b = -c$  である。

(2) 行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

を複素数  $a - bi$  に対応させる。この対応では、行列の積は複素数の積に対応する。したがって条件は  $(a - bi)^3 = 2 - 2i$  と同値である。

右辺を極形式で表すと  $2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ))$  である。よって 3 乗根は

$$a - bi = \sqrt{2} \left( \cos \frac{-45^\circ + 360^\circ k}{3} + i \sin \frac{-45^\circ + 360^\circ k}{3} \right)$$

で、 $k = 0, 1, 2$  である。

それぞれの角は  $-15^\circ, 105^\circ, 225^\circ$  である。 $a - bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  だから  $a = \rho \cos \theta, b = -\rho \sin \theta$  である。したがって  $(a, b) = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right), (a, b) = \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right), (a, b) = (-1, 1)$  を得る。

よって求める行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3} - 1}{2} & \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{3}}{2} & -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ \frac{1 + \sqrt{3}}{2} & \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は  $A$  と  $A^3$  が可換であることだけを使う。(2) は対応する複素数の 3 乗根を列挙する。

【解答】

(1)

$$J = A^3 = \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}$$

とおく。 $A$  は自分の 3 乗と可換だから  $AJ = JA$  である。両辺の左上成分を比較すると

$$ap - bq = pa + qc.$$

$q \neq 0$  より  $b = -c$ 。右上成分を比較すると

$$aq + bp = pb + qd$$

なので  $a = d$  である。

(2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a - bi$$

と対応させる。条件は

$$(a - bi)^3 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)).$$

絶対値は  $\sqrt{2}$ 、偏角は

$$-15^\circ, 105^\circ, 225^\circ.$$

よって

$$(a, b) = \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right), \left( \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right), (-1, 1).$$

これらを  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  に代入した 3 行列がすべてである。

【総評】 行列と複素数の対応を使う問題である。目安時間は 22 分程度。(1) は成分を直接展開してもよいが、2 次正方行列の基本恒等式を使うと、 $A^3$  が  $A$  と単位行列の一次結合になるため見通しがよい。 $q \neq 0$  によって係数が 0 でないことを確認するのが要点である。(2) は対応する複素数を  $a - bi$  とする符号に注意し、3 つの偏角から  $b = -\rho \sin \theta$  を計算する。

## 【第 6 問】

$C$  を底面が半径 2 の円で高さが 6 の直円錐 (すい) とし、これを  $xyz$  空間に頂点が原点  $O(0, 0, 0)$  で底面の中心が  $A(0, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  となるようにおく.  $C$  の表面のうち底面と頂点以外の部分を側面と呼ぶ.

(1)  $P(a, b, c)$  を  $C$  の側面の点とする.  $P$  から線分  $OA$  におろした垂線の長さを  $b, c$  で表せ. (2)  $c$  を  $0 < c \leq 2$  をみたす定数とする.  $(x, y, c)$  が  $C$  の表面かまたは内部の点であることを表す  $x$  と  $y$  による不等式を求めよ.

## ▶ 解法 1

## 【方針】

円錐の軸  $OA$  の単位ベクトルを作り、点を軸方向成分と軸に垂直な成分に分ける. 側面上では、軸からの距離が軸方向の距離の  $2/6 = 1/3$  になるので、(1) は軸方向成分から垂線の長さを表せる. (2) では平面  $z = c$  上の点  $(x, y, c)$  について、軸からの距離の 2 乗と軸方向の長さを計算し、円錐の内部条件「距離  $\leq$  軸方向長の  $1/3$ 」を不等式に整理する.

## 【解答】

(1) 円錐の軸は線分  $OA$  である. ここで  $A = (0, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  だから  $OA = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 6$  であり、軸方向の単位ベクトルは  $\vec{e} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  である.

点  $P(a, b, c)$  の軸方向の長さは  $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e} = \frac{b+c}{\sqrt{2}}$  である. 円錐は高さ 6 で底面の半径が 2 なので、側面上では、軸からの距離は軸方向の長さの  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  である. したがって、 $P$  から線分  $OA$  に下ろした垂線の長さは  $\frac{b+c}{3\sqrt{2}}$  である.

(2) 平面  $z = c$  上の点を  $(x, y, c)$  とする. ただしここでの  $c$  は問題文の定数で、 $0 < c \leq 2$  である.

この点の軸方向の長さは  $\frac{y+c}{\sqrt{2}}$  である. また、点  $(x, y, c)$  から軸  $OA$  までの距離の 2 乗は、全体の長さの 2 乗から軸方向成分の 2 乗を引けばよいので

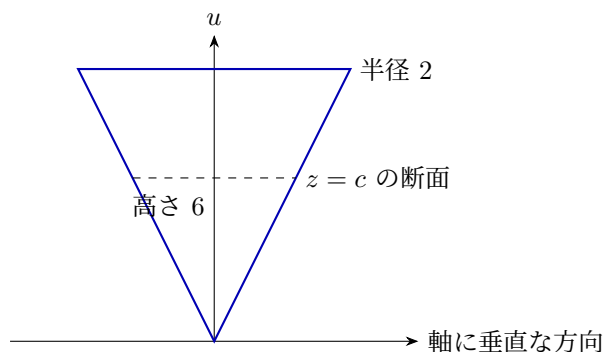
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + c^2 - \left(\frac{y+c}{\sqrt{2}}\right)^2 &= x^2 + y^2 + c^2 - \frac{(y+c)^2}{2} \\ &= x^2 + \frac{(y-c)^2}{2}. \end{aligned}$$

円錐の内部または表面にあるためには、軸からの距離が、軸方向の長さの  $1/3$  以下であればよい. したがって

$$x^2 + \frac{(y-c)^2}{2} \leq \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{y+c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(y+c)^2}{18}$$

である.

これを整理する. 両辺に 18 を掛けると  $18x^2 + 9(y-c)^2 \leq (y+c)^2$  である. 展開して  $18x^2 + 9y^2 - 18cy + 9c^2 \leq y^2 + 2cy + c^2$  となるので  $18x^2 + 8y^2 - 20cy + 8c^2 \leq 0$  である. これが、 $(x, y, c)$  が円錐  $C$  の表面または内部にあることを表す不等式である.



## ▶ 解法 2

### 【方針】

軸方向とそれに垂直な方向へ 45 度座標回転する。円錐は新座標で標準形になり、断面条件も直ちに出る。

### 【解答】

$$u = \frac{y+z}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{y-z}{\sqrt{2}}$$

と置く。  $u$  軸は円錐の軸  $OA$  である。高さ 6、底面半径 2 なので、円錐は

$$x^2 + v^2 \leq \frac{u^2}{9}, \quad 0 \leq u \leq 6$$

と表される。

#### (1)

側面上では軸からの距離は  $u/3$  である。  $P = (a, b, c)$  なら

$$u = \frac{b+c}{\sqrt{2}}$$

だから、求める垂線の長さは

$$\frac{b+c}{3\sqrt{2}}.$$

#### (2)

$z = c$  とすると

$$u = \frac{y+c}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{y-c}{\sqrt{2}}.$$

標準形へ代入して

$$x^2 + \frac{(y-c)^2}{2} \leq \frac{(y+c)^2}{18}.$$

整理すると

$$18x^2 + 8y^2 - 20cy + 8c^2 \leq 0.$$

$0 < c \leq 2$  のもとでは、この不等式から軸方向の範囲も自動的に満たされる。

**【総評】** 空間内の円錐を、軸方向と軸からの距離に分解して扱う問題である。目安時間は 20 分程度。軸の単位ベクトル  $(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  を最初に作ると、射影と垂直距離を計算しやすい。(1) では側面上にあるという条件により距離が軸方向長の  $1/3$  と分かる。(2) では座標の  $z$  成分としての定数  $c$  と、(1) の点  $P(a, b, c)$  の文字が紛らわしいため、式の意味を確認しながら整理する必要がある。