

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 1999 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$x > 0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - x^2 \log x$$

で定める．対数は自然対数である．

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ．(2) $f(x) \geq 0$ であることを示し， $f(x) = 0$ となる x を求めよ．(3) 正の実数 p, q について不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ．

第 2 問

空間の点 $(10, 0, 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし, 点 $(0, 10, 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする. S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル (a, b, c) ($c \geq 0$) をすべて求めよ.

第 3 問

曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線を l とする. l 上の点で x 座標が $a - 1$ と $a + 1$ のものをそれぞれ P および Q とする. a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ.

第 4 問

$T, O, H, O, K, U, A, O, B, A$ の 10 文字をでたらめに一行に並べる.

(1) どの二つの O も隣り合わない確率を求めよ. (2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ.

第 5 問

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する.

(i) P_3 は面積が 1 の正三角形である. (ii) P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする. P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である.

$n = 3, 4, 5, \dots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ.

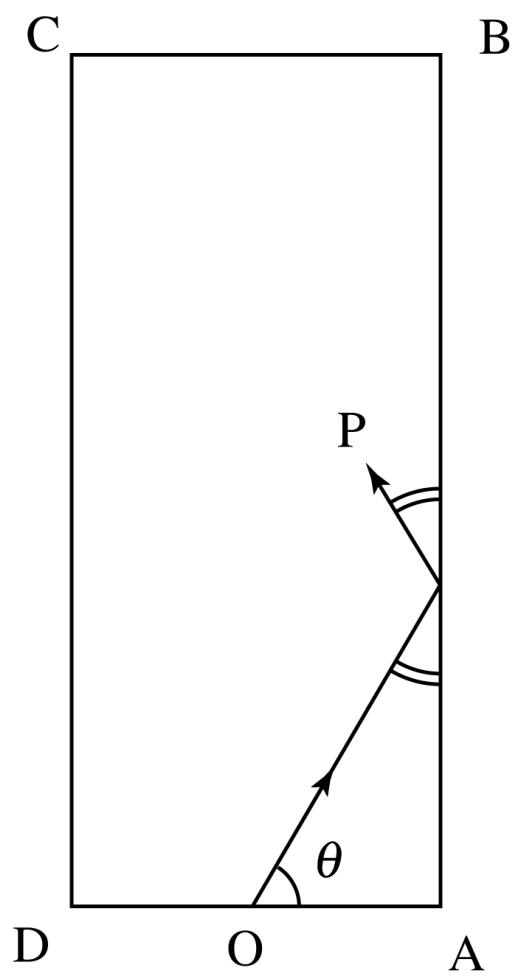
(1) $n \geq 4$ について $\frac{a_{n-1}}{n}$ を n を用いて表せ. (2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

を求めよ.

第 6 問

長方形 $ABCD$ 内を減速しながら進む点を考える，時刻 $t = 0$ に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする．ただし， P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする． AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする．初速を $v = 14$ としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか． OA との角を θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ として $\tan \theta$ を求めよ．またそのとき， P が頂点に到達する時刻を求めよ．



計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)