

東北大 1999 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$x > 0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - x^2 \log x$$

で定める. 対数は自然対数である.

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ. (2) $f(x) \geq 0$ であることを示し, $f(x) = 0$ となる x を求めよ.

(3) 正の実数 p, q について不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

(1) は微分計算を正確に行い, $f''(x) \geq 0$ を示して $f'(x)$ の単調増加を得る. $f''(x)$ はそのままでは符号が見にくいので, $u = (x^2 + 1)/(2x^2)$ とおき, $\log u - 1 + 1/u \geq 0$ を使う. (2) は $f(1) = f'(1) = 0$ と (1) から最小値を判断する. (3) は (2) を $x = p/q$ に適用し, 両辺に q^2 を掛けて対数を整理する.

【解答】

(1) まず微分する.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \log \frac{x^2 + 1}{2} + x + (x - 1) - 2x \log x - x \\ &= x \log \frac{x^2 + 1}{2x^2} + x - 1. \end{aligned}$$

さらに微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= \log \frac{x^2 + 1}{2x^2} + x \left(\frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x} \right) + 1 \\ &= \log \frac{x^2 + 1}{2x^2} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

ここで $u = \frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0$ とおくと $\frac{1}{u} = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ であるから $-1 + \frac{1}{u} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ である. したがって $f''(x) = \log u - 1 + \frac{1}{u}$ となる.

関数 $g(u) = \log u - 1 + \frac{1}{u}$ ($u > 0$) を考えると $g'(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} = \frac{u - 1}{u^2}$ である. よって $g(u)$ は $0 < u < 1$ で減少し, $u > 1$ で増加する. さらに $g(1) = 0$ だから, すべての $u > 0$ で $g(u) \geq 0$ である. したがって $f''(x) \geq 0$ ($x > 0$) であり, $f'(x)$ は単調増加である.

(2) 直接代入すると $f(1) = 0$ であり, また $f'(1) = 1 \cdot \log 1 + 1 - 1 = 0$ である. (1) より $f'(x)$ は単調増加であるから $0 < x < 1$ では $f'(x) \leq 0$, $x > 1$ では $f'(x) \geq 0$ である. したがって $f(x)$ は $x = 1$ で最小値をとり, その最小値は 0 である. よって $f(x) \geq 0$ であり, 等号成立は $x = 1$ のときである.

(3) 正の実数 p, q に対して, (2) を $x = \frac{p}{q}$ に適用する. すると

$$\frac{(p/q)^2 + 1}{2} \log \frac{(p/q)^2 + 1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - 1 \right)^2 - \left(\frac{p}{q} \right)^2 \log \frac{p}{q} \geq 0$$

である. 両辺に q^2 を掛けると

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2q^2} + \frac{1}{2}(p - q)^2 - p^2 \log \frac{p}{q} \geq 0$$

となる.

ここで $\log \frac{p^2 + q^2}{2q^2} = \log \frac{p^2 + q^2}{2} - \log q^2$ かつ $p^2 \log \frac{p}{q} = \frac{p^2}{2} \log p^2 - \frac{p^2}{2} \log q^2$ である。これらを代入して整理すると、 $\log q^2$ の係数は $-\frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{p^2}{2} = -\frac{q^2}{2}$ となるので

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} + \frac{1}{2}(p - q)^2 - \frac{p^2}{2} \log p^2 - \frac{q^2}{2} \log q^2 \geq 0$$

である。移項して

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

を得る。これが示すべき不等式である。

▶ 解法 2

【方針】

二階導関数に現れる対数不等式を独立に示して凸性を得る。(3) は同次化として (2) を比 p/q に適用する。

【解答】

(1)

微分すると

$$f''(x) = \log \frac{x^2 + 1}{2x^2} + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$u = \frac{x^2 + 1}{2x^2} > 0$$

と置けば

$$f''(x) = \log u - 1 + \frac{1}{u}.$$

$\phi(u) = \log u - 1 + 1/u$ は

$$\phi'(u) = \frac{u - 1}{u^2}$$

であり、 $u = 1$ で最小値 0 をとる。よって $f''(x) \geq 0$ 、したがって $f'(x)$ は単調増加する。

(2)

$$f(1) = f'(1) = 0.$$

f' の単調性より、 $x < 1$ で $f'(x) \leq 0$ 、 $x > 1$ で $f'(x) \geq 0$ である。よって

$$f(x) \geq 0$$

であり、等号は $x = 1$ のときに限る。

(3)

(2) に $x = p/q$ を代入し、両辺に q^2 を掛ける。対数を

$$\log \frac{p^2 + q^2}{2q^2} = \log \frac{p^2 + q^2}{2} - \log q^2$$

と分けて整理すれば

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}.$$

【総評】 微分計算、単調性、代入による不等式証明が連動する理系らしい問題である。目安時間は 25 分程度。最大の注意点は $f''(x)$ の符号判定で、 $\log u - 1 + 1/u \geq 0$ を自分で示す一手間が必要である。(3) は式変形が長く、特に $\log q^2$ の係数整理でミスが出やすい。 $x = p/q$ を代入した直後の式を丁寧に書けば、最後の不等式まで自然につながる。

【第 2 問】

空間の点 $(10, 0, 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし、点 $(0, 10, 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。
 S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル (a, b, c) ($c \geq 0$) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

原点を通る直線を、長さ 1 の方向ベクトル (a, b, c) を用いて $t(a, b, c)$ と表す。球面に接する条件は、球の中心からこの直線までの距離が半径に等しいことである。中心 $(10, 0, 0)$ 、 $(0, 10, 0)$ から直線への距離を、直角三角形または射影で求めると、それぞれ a^2 、 b^2 が決まる。最後に単位ベクトル条件 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ と $c \geq 0$ を使って c を決める。

【解答】

原点を通る直線を $(x, y, z) = t(a, b, c)$ と表す。ただし $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $c \geq 0$ である。

まず球面 S_1 について考える。中心 $(10, 0, 0)$ から直線への距離を求める。方向ベクトルが単位ベクトルなので、中心ベクトル $(10, 0, 0)$ の直線方向への射影の長さは $(10, 0, 0) \cdot (a, b, c) = 10a$ である。したがって、中心から直線までの距離の 2 乗は $10^2 - (10a)^2 = 100(1 - a^2)$ である。直線が半径 9 の球面 S_1 に接するためには、この距離が 9 に等しいから $100(1 - a^2) = 81$ であり、 $a^2 = \frac{19}{100}$ を得る。

同様に、球面 S_2 の中心 $(0, 10, 0)$ から直線方向への射影の長さは $10b$ である。したがって中心から直線までの距離の 2 乗は $100(1 - b^2)$ である。半径が 8 なので $100(1 - b^2) = 64$ より $b^2 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$ である。

以上と単位ベクトル条件から

$$\begin{aligned} c^2 &= 1 - a^2 - b^2 \\ &= 1 - \frac{19}{100} - \frac{36}{100} \\ &= \frac{45}{100} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

よって $c \geq 0$ より $c = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ である。 a と b の符号は距離条件では決まらず、互いに独立に選べる。したがって求める方向ベクトルは

$$(a, b, c) = \left(\pm \frac{\sqrt{19}}{10}, \pm \frac{3}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{10} \right)$$

である。ただし、2 つの符号は独立に選ぶ。

▶ 解法 2

【方針】

原点・球の中心・接点を作る直角三角形から、方向ベクトルの各軸成分の絶対値を求める。

【解答】

原点から球面 S_1 への接点を T_1 とする。中心を $E_1 = (10, 0, 0)$ とすれば

$$OE_1 = 10, \quad E_1T_1 = 9$$

で、三角形 OE_1T_1 は T_1 で直角である。直線方向と x 軸のなす角を ϕ_1 とすると

$$|a| = \cos \phi_1 = \frac{\sqrt{10^2 - 9^2}}{10} = \frac{\sqrt{19}}{10}.$$

同様に S_2 では中心までの距離 10、半径 8 なので

$$|b| = \frac{\sqrt{10^2 - 8^2}}{10} = \frac{3}{5}.$$

単位ベクトル条件より

$$c^2 = 1 - \frac{19}{100} - \frac{9}{25} = \frac{45}{100}.$$

$c \geq 0$ だから

$$c = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

したがって

$$(a, b, c) = \left(\pm \frac{\sqrt{19}}{10}, \pm \frac{3}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{10} \right),$$

ただし 2 つの符号は独立である。

【総評】 空間直線と球面の接触を、中心から直線への距離に置き換える問題である。目安時間は 12 分程度。方向ベクトルが長さ 1 であるため、射影の長さをそのまま内積で出せる点が計算を短くしている。 a^2, b^2 だけが決まるので符号を落とさないこと、最後に $c \geq 0$ で c の符号だけを固定することが重要である。球に接する点の座標を求める必要はない。

【第 3 問】

曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) での接線を l とする。 l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。 a が $-1 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接線の方程式をまず求め、線分上の点を接点の x 座標 a と、接点からの横方向のずれ s で表す。すると $x = a + s$ 、 $-1 \leq s \leq 1$ 、 $-1 \leq a \leq 1$ であり、 $y = x^2 - s^2$ という形になる。固定した x に対して可能な s の範囲を調べ、上下の y の差を x で積分する。端の区間と中央の区間で s の範囲が変わる点に注意する。

【解答】

曲線 $y = x^2$ の点 (a, a^2) における接線は $y - a^2 = 2a(x - a)$ すなわち $y = 2ax - a^2$ である。

この接線上で、接点から x 方向に s だけずれた点を考える。問題の線分 PQ では $-1 \leq s \leq 1$ であり、その点の x 座標は $x = a + s$ である。したがって $a = x - s$ であり、 $-1 \leq a \leq 1$ より $-1 \leq x - s \leq 1$ が必要である。

この点の y 座標は

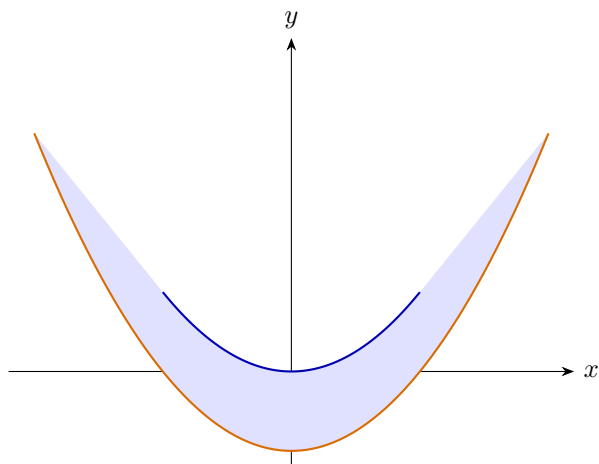
$$\begin{aligned} y &= 2a(a + s) - a^2 \\ &= a^2 + 2as \\ &= (x - s)^2 + 2(x - s)s \\ &= x^2 - s^2 \end{aligned}$$

である。よって求める領域は $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq x - s \leq 1$, $y = x^2 - s^2$ で表される。

固定した x に対して、 s の範囲は $[-1, 1] \cap [x-1, x+1]$ である。この範囲が空でないためには $-2 \leq x \leq 2$ である。 $-2 \leq x \leq -1$ では $-1 \leq s \leq x+1$ である。この範囲では s は 0 以下なので、 $y = x^2 - s^2$ は $s = x+1$ で最大、 $s = -1$ で最小となる。したがって上下の差は $\{x^2 - (x+1)^2\} - \{x^2 - 1\} = 1 - (x+1)^2$ である。 $-1 \leq x \leq 1$ では、 s の範囲が 0 を含み、端点のうち絶対値 1 も含むので、上下の差は $x^2 - (x^2 - 1) = 1$ である。 $1 \leq x \leq 2$ では $x-1 \leq s \leq 1$ であり、同様に上下の差は $1 - (x-1)^2$ である。

よって求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^{-1} \{1 - (x+1)^2\} dx + \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^2 \{1 - (x-1)^2\} dx \\ &= \frac{2}{3} + 2 + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$



▶ 解法 2

【方針】

接線を接点の横座標 a で表す。固定した x に対して許される a の区間上で、下に凸な 2 次式の最大・最小を求める。

【解答】

接線は

$$y = 2ax - a^2$$

である。線分条件は $|x - a| \leq 1$ 、また $|a| \leq 1$ だから、固定した x に対して

$$\max(-1, x - 1) \leq a \leq \min(1, x + 1).$$

$2ax - a^2 = x^2 - (a - x)^2$ を用いる。

$-2 \leq x \leq -1$ では上下の差は

$$1 - (x + 1)^2,$$

$-1 \leq x \leq 1$ では 1、 $1 \leq x \leq 2$ では

$$1 - (x - 1)^2$$

である。したがって面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^{-1} \{1 - (x + 1)^2\} dx + \int_{-1}^1 1 dx \\ & + \int_1^2 \{1 - (x - 1)^2\} dx = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 動く線分の通過領域を求める問題で、目安時間は 18 分程度。接線の媒介表示までは標準的だが、領域の面積では a と線分内の位置 s の 2 つの条件を同時に扱う必要がある。 $y = x^2 - s^2$ まで変形できると、固定した x に対して s の範囲を調べるだけになる。端の 2 区間を落として中央の長方形部分だけを数える誤答が出やすい。

【第 4 問】

$T, O, H, O, K, U, A, O, B, A$ の 10 文字をでたらめに一列に並べる。

(1) どの二つの O も隣り合わない確率を求めよ。(2) どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

全体は重複文字を含む順列として数える。(1) はまず O 以外の 7 文字を並べ、その前後と間の 8 つのすき間から 3 つを選んで O を 1 つずつ入れる。(2) で同じ文字が隣り合う可能性があるのは O と A だけなので、余事象「 O も A も隣り合わない」を数える。(1) で数えた「 O が隣り合わない」並べ方から、さらに AA が隣り合っているものを除くと整理しやすい。

【解答】

10 文字のうち、 O は 3 個、 A は 2 個あり、その他の 5 文字はすべて異なる。したがって全体の場合の数は $\frac{10!}{3!2!} = 302400$ である。

(1) まず O 以外の 7 文字 T, H, K, U, A, B, A を並べる。 A が 2 個あるので、その並べ方は $\frac{7!}{2!}$ 通りである。

この 7 文字を並べたあと、文字の前後と間には合計 8 か所のすき間がある。どの 2 つの O も隣り合わないためには、この 8 か所から 3 か所を選び、それぞれに O を 1 つずつ入れればよい。よって条件を満たす並べ方は $\frac{7!}{2!} {}_8C_3$ 通りである。したがって求める確率は

$$\frac{\frac{7!}{2!} {}_8C_3}{\frac{10!}{3!2!}} = \frac{7}{15}$$

である。

(2) 同じ文字が隣り合う可能性があるのは、3 個ある O と 2 個ある A だけである。そこで余事象、すなわち「どの 2 つの O も隣り合わず、かつ 2 つの A も隣り合わない」並べ方を数える。

(1) より、どの 2 つの O も隣り合わない並べ方は $\frac{7!}{2!} {}_8C_3 = 141120$ 通りである。この中から、 A が隣り合っているものを除く。 AA を 1 つのかたまりと見なすと、 O 以外の文字は AA, T, H, K, U, B の 6 個になる。これらの並べ方は 6! 通りであり、その前後と間の 7 つのすき間から 3 つを選んで O を入れれば、 O は隣り合わない。したがって、 O は隣り合わないが A が隣り合う並べ方は $6! {}_7C_3 = 25200$ 通りである。

よって余事象の場合の数は $141120 - 25200 = 115920$ である。したがって求める確率は $1 - \frac{115920}{302400} = \frac{37}{60}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(2) を同じ文字が隣り合う事象の和として、包含排除で直接数える。

【解答】

全順列数は

$$\frac{10!}{3!2!} = 302400.$$

(1)

O 以外の 7 文字を並べる方法は $7!/2!$ 通り。その 8 個のすき間から 3 個を選ぶので

$$\frac{7!}{2!} {}_8C_3 = 141120.$$

よって確率は

$$\frac{141120}{302400} = \frac{7}{15}.$$

(2)

E_O を O がどこかで隣り合う事象、 E_A を 2 個の A が隣り合う事象とする。

$$|E_O| = 302400 - 141120 = 161280.$$

AA を 1 個の文字とみなせば

$$|E_A| = \frac{9!}{3!} = 60480.$$

AA が隣り合い、かつ O が隣り合わない並べ方は

$$6! \cdot {}_7C_3 = 25200$$

だから

$$|E_O \cap E_A| = 60480 - 25200 = 35280.$$

したがって

$$\frac{|E_O \cup E_A|}{302400} = \frac{161280 + 60480 - 35280}{302400} = \frac{37}{60}.$$

【総評】 重複順列と余事象を組み合わせる確率問題である。目安時間は 14 分程度。(1) はすき間法の典型で、O 以外の 7 文字に A が重複している点だけ注意する。(2) では「同じ文字」は O だけでなく A も含む。直接数えるより、O も A も隣り合わない並べ方を引く方が安全であり、AA を 1 つのかたまりとして除く流れが明快である。

【第 5 問】

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i) P_3 は面積が 1 の正三角形である。(ii) P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。 P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

$n = 3, 4, 5, \dots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1) $n \geq 4$ について $\frac{a_{n-1}}{n}$ を n を用いて表せ。(2) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正多角形の面積を周長で表して漸化式を作る。原文 (1) の a_{n-1}/n は積の形で表し、(2) で必要な比 a_{n-1}/a_n は漸化式から別に導く。

【解答】

(1)

周長が L の正 n 角形の面積は、辺長を L/n 、中心から辺までの距離を

$$\frac{L}{2n \tan(\pi/n)}$$

として

$$\frac{1}{2}L \cdot \frac{L}{2n \tan(\pi/n)} = \frac{L^2}{4n \tan(\pi/n)}$$

である。

P_{k-1} と同じ面積の円の周長は $2\sqrt{\pi a_{k-1}}$ だから

$$a_k = \frac{\pi a_{k-1}}{k \tan(\pi/k)} \quad (k \geq 4).$$

$a_3 = 1$ より、原文どおりの量は

$$\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{4 \tan(\pi/4)} \frac{\pi}{5 \tan(\pi/5)} \cdots \frac{\pi}{(n-1) \tan(\pi/(n-1))}$$

である。 $n = 4$ のとき、積に相当する部分は 1 とする。

(2)

上の漸化式を添字 n で使えば

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n}.$$

したがって求める式は

$$n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right) = \frac{n^3}{\pi} \left(\tan \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \right).$$

$x = \pi/n$ とおくと

$$\frac{n^3}{\pi} (\tan x - \sin x) = \pi^2 \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

さらに

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

よって極限は

$$\frac{\pi^2}{2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

周長と内接円半径から正多角形の面積比を作る。(2) は三角関数の差を基本極限 3 個の積へ分解する。

【解答】

(1)

正 k 角形を中心から k 個の二等辺三角形へ分ける。周長を L とすると、1 辺は L/k 、高さは

$$\frac{L/k}{2 \tan(\pi/k)}$$

だから面積は

$$\frac{L^2}{4k \tan(\pi/k)}.$$

P_{k-1} と同面積の円の周長は $2\sqrt{\pi a_{k-1}}$ なので

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\pi}{k \tan(\pi/k)}.$$

したがって原文の量は

$$\frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \frac{\pi}{4 \tan(\pi/4)} \frac{\pi}{5 \tan(\pi/5)} \cdots \frac{\pi}{(n-1) \tan(\pi/(n-1))}.$$

(2)

同じ比から

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{n}{\pi} \tan \frac{\pi}{n}.$$

$x = \pi/n$ と置けば、求める極限は

$$\pi^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

半角公式を用いると

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{4 \sin^3(x/2) \cos(x/2)}{\cos x}.$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x/2)}{\cos x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

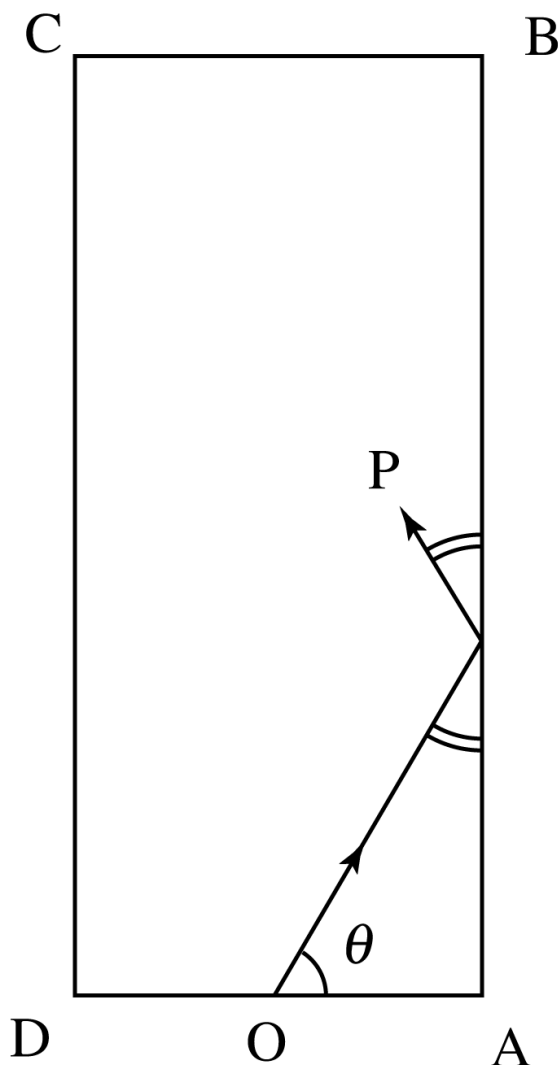
したがって答えは

$$\frac{\pi^2}{2}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5、目安 22 分。周長から正多角形の面積公式を作ることが核心。原典 TeX・JPG・PDF の (1) はいずれも a_{n-1}/n なので積の形で文字どおり解答し、(2) で必要な a_{n-1}/a_n は漸化式から別に導いた。極限は $\tan x - \sin x = \sin x(1 - \cos x)/\cos x$ と分けて基本極限だけで処理する。

【第 6 問】

長方形 $ABCD$ 内を減速しながら進む点を考える、時刻 $t = 0$ に初速 v で発射させた点 P は、時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする。ただし、 P がいずれかの辺にきたときは等しい入射角と反射角で反射するとし、頂点 A , B , C , D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。 AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし、出発点は AD の中点 O とする。初速を $v = 14$ としたとき、最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。 OA との角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) として $\tan \theta$ を求めよ。またそのとき、 P が頂点に到達する時刻を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

反射を含む長方形内の運動は、長方形を鏡映して平面に敷き詰めることで直線運動に変換する。出発点 O を原点、 OA 方向を横方向、 AB 方向を縦方向とすると、頂点の像は $(2m-1, 4n)$ 型に並ぶ。速さ $14e^{-t}$ で進むので、時刻 T までの移動距離は $14(1 - e^{-T})$ であり、到達可能な頂点像の距離は 14 未満でなければならない。14 未満で最も長い距離の頂点像を探し、その方向と時刻を求める。

【解答】

長方形での反射を、長方形を鏡のように反転して敷き詰めることにより、展開平面上の直線運動として考える。

出発点 O を原点にとり、 OA の向きを横軸、 AB の向きを縦軸にとる。 $AD = 2$ で O は AD の中点だから、横方向に見ると頂点は O から奇数だけ離れた位置に現れる。また $AB = 4$ なので、縦方向には 4 の倍数だけ離れた位置に頂点の像が現れる。したがって、第 1 象限にある頂点の像は $(2m-1, 4n)$ (m, n は正の整数) の形である。

時刻 T までに進む距離は

$$\int_0^T 14e^{-t} dt = 14(1 - e^{-T})$$

である。この値は常に 14 より小さいので、到達できる頂点像までの距離は 14 未満でなければならない。距離は $\sqrt{(2m-1)^2 + (4n)^2}$ である。

14 未満でできるだけ大きい距離を調べる。 $4n < 14$ より $n = 1, 2, 3$ だけを考えればよい。各 n で許される最大の奇数 $2m-1$ を見ると

n	$4n$	許される最大の $2m-1$
1	4	13
2	8	11
3	12	7

である。対応する距離の 2 乗は $13^2 + 4^2 = 185$, $11^2 + 8^2 = 185$, $7^2 + 12^2 = 193$ である。したがって 14 未満で最も長い距離を与える頂点像は $(7, 12)$ であり、その距離は $\sqrt{7^2 + 12^2} = \sqrt{193}$ である。

よって、発射方向について $\tan \theta = \frac{12}{7}$ である。また、到達時刻 T は $14(1 - e^{-T}) = \sqrt{193}$ を満たす。したがって $e^{-T} = 1 - \frac{\sqrt{193}}{14} = \frac{14 - \sqrt{193}}{14}$ であり、 $T = \log \frac{14}{14 - \sqrt{193}}$ である。

以上より

$$\tan \theta = \frac{12}{7}, \quad T = \log \frac{14}{14 - \sqrt{193}}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

展開図上の頂点像の距離平方を、縦方向の層ごとに最大化する。全候補を列举せず、合同条件で最長像を絞る。

【解答】

反射のたびに長方形を鏡映すると、軌跡は直線になる。 OA 方向を第 1 座標、 AB 方向を第 2 座標とすれば、頂点像は

$$(2m-1, 4n) \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

にある。総移動距離は最大でも 14 未満なので

$$(2m-1)^2 + (4n)^2 < 196.$$

対称性から両座標を非負としてよい。

$n = 0, 1, 2, 3$ ごとに可能な最大の奇数座標を選ぶと

n	$2m-1$	距離の 2 乗
0	13	169
1	13	185
2	11	185
3	7	193

であり、 $n \geq 4$ は縦座標だけで 16 以上になる。したがって最長の到達可能像は $(7, 12)$ である。

よって

$$\tan \theta = \frac{12}{7}.$$

到達時刻を T とすると

$$\int_0^T 14e^{-t} dt = 14(1 - e^{-T}) = \sqrt{193}.$$

したがって

$$T = \log \frac{14}{14 - \sqrt{193}}.$$

【総評】 反射運動を展開図の直線運動に変換する発想が核心の問題である。目安時間は 25 分程度。速さが時間で減衰するため、進める総距離は無限時間でも 14 に近づくだけであり、距離 14 未満の頂点像から最大のものを選ぶ必要がある。候補を感覚で選ばず、 $n = 1, 2, 3$ の表で最大距離を比較すると安全である。最後は方向の傾きと、移動距離の式 $14(1 - e^{-T})$ を別々に処理する。