

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2000 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

曲線 $y = re^{rx}$ (r は正の定数) 上の点 $P(a, b)$ における接線が原点を通るとする. 点 P を通り y 軸に平行な直線, x 軸, y 軸および曲線 $y = re^{rx}$ によって囲まれる部分を S とし, S を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 , S を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする.

- (1) a, b を r を用いて表せ.
- (2) $V_1 = V_2$ となるような r の値を求めよ.

第 2 問

- (1) $\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \vec{0}$$

を満たすとき, 3つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めよ.

- (2) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{x}$ を任意の平面ベクトルとすると,

$$|\vec{a} - \vec{x}| \geq |\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

であることを示せ.

ここで, $\vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{x}$ と $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の内積を表す.

- (3) すべての内角が 120° 未満の三角形 ABC の内部の点 X から各頂点までの距離の和

$$|\overrightarrow{XA}| + |\overrightarrow{XB}| + |\overrightarrow{XC}|$$

が最小となるような X を求めよ.

第 3 問

次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left\{ 1 + \sqrt{3} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right) \right\} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$ とおくとき, b_{n+1} と b_n との関係式を求めよ.
- (2) b_n および a_n を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

第 4 問

n 個の a と m 個の b を一列に並べるとき、同じ文字が連続している部分をその文字の連ということにする．たとえば、 $n = 7$ 、 $m = 5$ のときの 1 つの順列

$aababbaaabba$

については、 a の連の個数は 4、 b の連の個数は 3 で、連の総数は 7 である．次の問いに答えよ．

- (1) 全く同じで区別のつかない h 個の球を、区別のつく k 個の箱に入れるとき、空箱の生じないような入れ方の総数を求めよ、ただし、 $h \geq k$ とする．
- (2) $n = 7$ 、 $m = 5$ として、 a が p ($1 \leq p \leq 6$) 個の連をもつとき、 b の連の個数を調べよ．
- (3) $n = 7$ 、 $m = 5$ のとき、すべての順列が等しい確率で生ずるとして、 a の連の個数と b の連の個数の和が 4、7、11 となる確率をそれぞれ求めよ．

第 5 問

a, b, r は正の定数とする. xy 平面上で, 点 P, Q をそれぞれ x 軸, y 軸上にとり $PQ = r$ とする. 線分 PQ を P 側へ延長して $AP = a$ となる点 A をとり, また, 線分 PQ を Q 側へ延長して $BQ = b$ となる点 B をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P, Q がそれぞれ x 軸上, y 軸上を動くとき, 点 A が描く曲線を C_1 , 点 B が描く曲線を C_2 とする. 曲線 C_1, C_2 の方程式を a, b, r を用いて表せ.
- (2) $r = 2(\sqrt{3} - 1)$, $a = 2$, $b = 2$ のときに曲線 C_1 に囲まれる領域と, 曲線 C_2 に囲まれる領域の重なり合う部分の面積を求めよ.

第 6 問

実数 b, d と正の数 c に対して，関数 $f(x) = x^3 + bx^2 - cx + d$ ，および， $f(x)$ と y 軸に関して対称なグラフをもつ関数 $g(x)$ について次の問いに答えよ．

- (1) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ との交点の x 座標，および，点 $(0, d)$ で曲線 $y = g(x)$ に接する直線 l と曲線 $y = f(x)$ との交点の x 座標をそれぞれ求めよ．
- (2) 直線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる領域の面積 S_1 を b, c, d で表せ．
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S_2 が $S_1 = 11S_2$ を満たすための b, c, d の条件を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)