

東北大学 2000 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $y = re^{rx}$ (r は正の定数) 上の点 $P(a, b)$ における接線が原点を通るとする. 点 P を通り y 軸に平行な直線, x 軸, y 軸および曲線 $y = re^{rx}$ によって囲まれる部分を S とし, S を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_1 , S を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする.

- (1) a, b を r を用いて表せ.
- (2) $V_1 = V_2$ となるような r の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

まず接線が原点を通る条件を、点 $P(a, b)$ における接線の方程式または傾きで表す. $b = re^{ra}$ 、接線の傾き r^2e^{ra} を使うと $a = 1/r$ 、 $b = re$ が出る. 回転体は S が $0 \leq x \leq 1/r$ 、 $0 \leq y \leq re^{rx}$ の領域であることを確認し、 x 軸回転は円板法、 y 軸回転は円筒殻で計算して等式を解く.

【解答】

(1) 曲線 $y = re^{rx}$ の導関数は $y' = r^2e^{rx}$ である. 点 $P(a, b)$ は曲線上にあるから $b = re^{ra}$ である. また、 P における接線の傾きは r^2e^{ra} である. 接線が原点を通るので、その傾きは直線 OP の傾き b/a に等しい. したがって $\frac{b}{a} = r^2e^{ra}$ である. ここへ $b = re^{ra}$ を代入すると $\frac{re^{ra}}{a} = r^2e^{ra}$ であり、 $r > 0$ 、 $e^{ra} > 0$ より $a = \frac{1}{r}$ を得る. よって $b = re^{r \cdot (1/r)} = re$ である.

(2) (1) より、領域 S は $0 \leq x \leq \frac{1}{r}$ 、 $0 \leq y \leq re^{rx}$ である. これを x 軸のまわりに回転すると、円板法により

$$V_1 = \pi \int_0^{1/r} (re^{rx})^2 dx = \pi r^2 \int_0^{1/r} e^{2rx} dx$$

である. したがって

$$V_1 = \pi r^2 \left[\frac{e^{2rx}}{2r} \right]_0^{1/r} = \frac{\pi r(e^2 - 1)}{2}$$

である.

一方、 y 軸のまわりに回転すると、半径 x 、高さ re^{rx} の円筒殻で

$$V_2 = 2\pi \int_0^{1/r} xre^{rx} dx$$

である. $u = rx$ とおくと

$$\int_0^{1/r} xre^{rx} dx = \frac{1}{r} \int_0^1 ue^u du = \frac{1}{r} [e^u(u-1)]_0^1 = \frac{1}{r}$$

なので $V_2 = \frac{2\pi}{r}$ である. $V_1 = V_2$ より $\frac{\pi r(e^2 - 1)}{2} = \frac{2\pi}{r}$ である. $r > 0$ だから $r^2 = \frac{4}{e^2 - 1}$ となり、求める値は $r = \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}}$ である.

▶ 解法 2

【方針】

a, b を接線条件から決めた後、 y 軸回転の体積を水平切片の円環で求める。円筒殻を使わない検算になる。

【解答】

(1) $P(a, b)$ は曲線上にあるから $b = re^{ra}$ 。接線の傾きは $r^2 e^{ra}$ であり、接線が原点を通るので

$$\frac{b}{a} = r^2 e^{ra}.$$

両式から

$$a = \frac{1}{r}, \quad b = re.$$

(2) x 軸回転では

$$V_1 = \pi \int_0^{1/r} r^2 e^{2rx} dx = \frac{\pi r(e^2 - 1)}{2}.$$

y 軸回転を水平切片で考える。 $0 \leq y \leq r$ では半径 $1/r$ の円板、 $r \leq y \leq re$ では外半径 $1/r$ 、内半径

$$x = \frac{1}{r} \log \frac{y}{r}$$

の円環になる。したがって

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{\pi}{r^2} \int_0^r dy + \frac{\pi}{r^2} \int_r^{re} \left\{ 1 - \left(\log \frac{y}{r} \right)^2 \right\} dy \\ &= \frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{r} \int_0^1 (1 - u^2) e^u du = \frac{2\pi}{r}. \end{aligned}$$

よって $V_1 = V_2$ から

$$r = \frac{2}{\sqrt{e^2 - 1}}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 6。目安は 25 分。接線条件から $a = 1/r$ を出す前半と、2 種類の回転体積を正しく使い分ける後半に分かれる。 y 軸回転で円板法を使おうとすると逆関数が必要になり面倒なので、円筒殻 $2\pi x y dx$ を使うのが自然である。体積の次元として V_1 は r に比例し、 V_2 は $1/r$ に比例するため、等式から r^2 が出ることも検算になる。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

(1) $\vec{0}$ でない平面ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \vec{0}$$

を満たすとき、3 つのベクトルの互いになす角をそれぞれ求めよ。

(2) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{x}$ を任意の平面ベクトルとすると,

$$|\vec{a} - \vec{x}| \geq |\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

であることを示せ。

ここで、 $\vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ は $\vec{x}$ と $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ の内積を表す。

(3) すべての内角が 120° 未満の三角形 ABC の内部の点 X から各頂点までの距離の和

$$|\vec{XA}| + |\vec{XB}| + |\vec{XC}|$$

が最小となるような X を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 3 つの単位ベクトルの和が 0 であることから、任意の 2 つの和が残り 1 つの反対向きになることを利用して内積を出す。(2) は $\vec{a}$ 方向の単位ベクトルへの射影がベクトルの長さを超えないという事実を式にする。(3) は各頂点へ向かう 3 方向が互いに 120° となる点を取り、(2) を 3 本のベクトルに加えて距離和の下界を作る。

【解答】

(1)

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \vec{w} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

とおく。これらはいずれも単位ベクトルであり、仮定より $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ である。したがって $\vec{u} + \vec{v} = -\vec{w}$ である。両辺の長さの 2 乗を取ると $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |-\vec{w}|^2 = 1$ である。一方、左辺は

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

だから $2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ すなわち $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$ である。よって $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は 120° である。同様に他の 2 組についてもなす角はすべて 120° である。

(2) $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ とおくと、 $\vec{e}$ は単位ベクトルである。任意のベクトル $\vec{y}$ について、内積の定義から

$$\vec{y} \cdot \vec{e} = |\vec{y}| \cos \phi \leq |\vec{y}|$$

である。ここで ϕ は $\vec{y}$ と $\vec{e}$ のなす角である。 $\vec{y} = \vec{a} - \vec{x}$ とすれば

$$|\vec{a} - \vec{x}| \geq (\vec{a} - \vec{x}) \cdot \vec{e} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

である。右辺は

$$|\vec{a}| - \vec{x} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

なので、示すべき不等式が成り立つ。

(3) 三角形 ABC のすべての内角が 120° 未満であるとき、内部に $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120^\circ$ を満たす点 X がただ 1 つ存在する。この点を取る。

任意の点 Y に対して、 $\vec{x} = \overrightarrow{XY}$ とおく。(2) を

$$\vec{a} = \overrightarrow{XA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{XB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{XC}$$

にそれぞれ適用すると

$$|\vec{YA}| = |\vec{XA} - \vec{XY}| \geq |\vec{XA}| - \vec{XY} \cdot \frac{\vec{XA}}{|\vec{XA}|}$$

である。同様の不等式を B, C についても書いて加えると

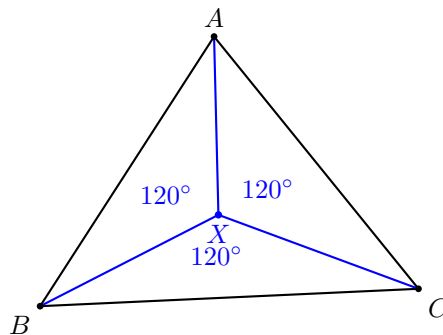
$$|\vec{YA}| + |\vec{YB}| + |\vec{YC}| \geq |\vec{XA}| + |\vec{XB}| + |\vec{XC}| - \vec{XY} \cdot \left(\frac{\vec{XA}}{|\vec{XA}|} + \frac{\vec{XB}}{|\vec{XB}|} + \frac{\vec{XC}}{|\vec{XC}|} \right)$$

である。

点 X では 3 本の方向が互いに 120° をなすので、(1) より括弧内の単位ベクトルの和は $\vec{0}$ である。したがって

$$|\vec{YA}| + |\vec{YB}| + |\vec{YC}| \geq |\vec{XA}| + |\vec{XB}| + |\vec{XC}|$$

である。よって距離の和を最小にする点は、三角形の内部で $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = 120^\circ$ を満たす点である。



▶ 解法 2

【方針】

(3) では正三角形を外側に作り、60 度回転で 3 本の距離を 1 本の折れ線へ変える。三角不等式の等号条件から 120 度点を特徴づける。

【解答】

(1) 単位ベクトルを u, v, w とすると

$$u + v + w = 0.$$

$u + v = -w$ の長さの 2 乗を取れば

$$2 + 2u \cdot v = 1,$$

よって $u \cdot v = -1/2$ である。他の組も同様なので、互いになす角はすべて 120° である。

(2) $e = a/|a|$ とおく。任意の y に対し

$$y \cdot e \leq |y|$$

だから、 $y = a - x$ とすれば

$$|a - x| \geq |a| - x \cdot \frac{a}{|a|}.$$

(3) 辺 AB の三角形と反対側に正三角形 ABP を作る。任意の点 Y を A のまわりに 60° 回転した点を Y' とすると

$$YY' = YA, \quad Y'P = YB.$$

したがって三角不等式より

$$YA + YB + YC = YY' + Y'P + YC \geq CP.$$

等号は C, Y, Y', P がこの順に一直線上にあるときに限る。このとき回転角が 60° であることから

$$\angle AYB = \angle BYC = \angle CYA = 120^\circ.$$

全内角が 120° 未満なら、この条件を満たす点 Y は三角形の内部にただ 1 つ存在する。よって求める点は、3 頂点を見込む角がすべて 120° となる点である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 6。目安は 32 分。いわゆる 3 頂点からの距離和を最小にする点を、ベクトルの不等式として証明する問題である。(2) の不等式は射影の長さ評価であり、(3) ではそれを 3 回足したときに単位ベクトルの和が消える構造が核心になる。 120° 未満という条件は、求める点が三角形の内部に存在するための条件であり、角が 120° 以上の頂点がある場合とは結論が変わる点も意識したい。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

次の式を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \left\{ 1 + \sqrt{3} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right) \right\} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$ とおくとき, b_{n+1} と b_n との関係式を求めよ.
 (2) b_n および a_n を求めよ.
 (3) 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

漸化式の右辺にも a_{n+1} が含まれているので, まず a_{n+1} について解く. その後, 指定された $b_n = a_n/(\sqrt{2} - a_n)$ に代入すると, 分母の形がそろって等比数列になる. b_n を求めたら, $a_n = \sqrt{2}b_n/(1 + b_n)$ に戻し, $b_n \rightarrow \infty$ から極限を出す.

【解答】

(1) 与えられた漸化式は

$$a_{n+1} = \left\{ 1 + \sqrt{3} \left(1 - \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2}} \right) \right\} a_n$$

である. 右辺を展開して a_{n+1} を左辺へ集めると $a_{n+1} = (1 + \sqrt{3})a_n - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_na_{n+1}$ だから $a_{n+1} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_n \right) = (1 + \sqrt{3})a_n$ である. よって

$$a_{n+1} = \frac{(1 + \sqrt{3})a_n}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_n} = \frac{2(1 + \sqrt{3})a_n}{2 + \sqrt{6}a_n}$$

である.

ここで $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$ とおく. すると

$$\sqrt{2} - a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{2(1 + \sqrt{3})a_n}{2 + \sqrt{6}a_n} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}a_n - 2a_n - 2\sqrt{3}a_n}{2 + \sqrt{6}a_n} = \frac{2(\sqrt{2} - a_n)}{2 + \sqrt{6}a_n}$$

である. したがって

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{2} - a_{n+1}} = \frac{\frac{2(1 + \sqrt{3})a_n}{2 + \sqrt{6}a_n}}{\frac{2(\sqrt{2} - a_n)}{2 + \sqrt{6}a_n}} = (1 + \sqrt{3}) \frac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$$

である. よって $b_{n+1} = (1 + \sqrt{3})b_n$ である.

(2) $b_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2} - a_1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$ である. (1) より b_n は公比 $1 + \sqrt{3}$ の等比数列だから $b_n = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}$ である.

また $b_n = a_n/(\sqrt{2} - a_n)$ から $b_n(\sqrt{2} - a_n) = a_n$ すなわち $a_n = \frac{\sqrt{2}b_n}{1 + b_n}$ である. したがって

$$a_n = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}}{1 + (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}}$$

である.

(3) $1 + \sqrt{3} > 1$ なので $b_n = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1} \rightarrow \infty$ である. したがって $a_n = \frac{\sqrt{2}b_n}{1 + b_n} \rightarrow \sqrt{2}$ であり, 求める極限値は $\sqrt{2}$ である.

▶ 解法 2

【方針】

指定の b_n を使わず、まず逆数 $u_n = 1/a_n$ の一次漸化式へ変換する。不動点からの差を等比数列にする。

【解答】

(1) 与式を a_{n+1} について解くと

$$a_{n+1} = \frac{(1 + \sqrt{3})a_n}{1 + \sqrt{3/2}a_n}.$$

ここで $u_n = 1/a_n$ とおけば

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3/2}}{1 + \sqrt{3}}.$$

この一次変換の不動点は $1/\sqrt{2}$ なので

$$u_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \left(u_n - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$u_1 = 1$ から

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1 + \sqrt{3})^{-(n-1)}.$$

(2) 逆数を取って整理すると

$$a_n = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}}{1 + (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}}.$$

また

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{2} - a_n}$$

へこの式を代入すれば

$$b_n = (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})^{n-1}, \quad b_{n+1} = (1 + \sqrt{3})b_n.$$

(3) 最後に $u_n \rightarrow 1/\sqrt{2}$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安は 23 分。漸化式に a_{n+1} が両辺に出てくるため、最初にこれを解き忘れると以後の変形ができない。指定された b_n は、 $\sqrt{2} - a_{n+1}$ の分母がうまく消えるように作られている。 $b_n > 0$ から $a_n = \sqrt{2}b_n/(1 + b_n) < \sqrt{2}$ も分かるので、分母 $\sqrt{2} - a_n$ が途中で 0 にならないことの確認にもなっている。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

n 個の a と m 個の b を一列に並べるとき、同じ文字が連続している部分をその文字の連ということにする。たとえば、 $n = 7, m = 5$ のときの 1 つの順列

$aababbbaaabba$

については、 a の連の個数は 4、 b の連の個数は 3 で、連の総数は 7 である。次の問いに答えよ。

- (1) 全く同じで区別のつかない h 個の球を、区別のつく k 個の箱に入れるとき、空箱の生じないような入れ方の総数を求めよ、ただし、 $h \geq k$ とする。
- (2) $n = 7, m = 5$ として、 a が p ($1 \leq p \leq 6$) 個の連をもつとき、 b の連の個数を調べよ。
- (3) $n = 7, m = 5$ のとき、すべての順列が等しい確率で生ずるとして、 a の連の個数と b の連の個数の和が 4, 7, 11 となる確率をそれぞれ求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

連は、同じ文字を正の個数のブロックに分け、それらのブロックを交互に並べることに対応する。(1) で正の整数分割の数を確認し、(2) では a の連数 p に対して b の連数が始まりと終わりの文字により $p-1, p, p+1$ のどれになるかを整理する。(3) は a の分け方 ${}_6C_{p-1}$ 、 b の分け方 ${}_4C_{q-1}$ 、交互に並べる始末端の数を掛ける。

【解答】

(1) h 個の同じ球を k 個の区別できる箱へ、空箱がないように入れる。各箱に入る個数を $x_1, x_2, \dots, x_k$ とすると $x_1 + x_2 + \dots + x_k = h$, $x_i \geq 1$ である。 h 個を横に並べたすき間 $h-1$ 個のうち、 $k-1$ 個を仕切りに選べばよい。したがって総数は ${}_{h-1}C_{k-1}$ である。

(2) a の連が p 個であるとする。 a の連と b の連は交互に現れるので、 b の連数を q とすると、始まりと終わりの文字によって $q = p-1, q = p, q = p+1$ のいずれかである。ただし b は 5 個しかないので $1 \leq q \leq 5$ でなければならない。よって $1 \leq p \leq 6$ について表にすると

p	q
1	1, 2
2	1, 2, 3
3	2, 3, 4
4	3, 4, 5
5	4, 5
6	5

である。

(3) 全体の順列数は、12 箇所のうち a を置く 7 箇所を選んで ${}_{12}C_7 = 792$ 通りである。 a の連が p 個、 b の連が q 個であるとする。7 個の a を p 個の空でない連に分ける方法は ${}_6C_{p-1}$ 通り、5 個の b を q 個の空でない連に分ける方法は ${}_4C_{q-1}$ 通りである。さらにブロックの並びは、 $p = q$ なら a から始めるか b から始めるかの 2 通り、 $p = q+1$ または $q = p+1$ なら 1 通りである。

連の総数が 4 のとき、可能なのは $(p, q) = (2, 2)$ だけである。したがって通り数は $2 \cdot {}_6C_{14}C_1 = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ である。

連の総数が 7 のとき、可能なのは $(p, q) = (3, 4), (4, 3)$ である。したがって通り数は

$${}_6C_{24}C_3 + {}_6C_{34}C_2 = 15 \cdot 4 + 20 \cdot 6 = 180$$

である。

連の総数が 11 のとき、可能なのは $(p, q) = (6, 5)$ だけである。したがって通り数は ${}_6C_{54}C_4 = 6$ である。

よって求める確率はそれぞれ

$$\frac{48}{792} = \frac{2}{33}, \quad \frac{180}{792} = \frac{5}{22}, \quad \frac{6}{792} = \frac{1}{132}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

一方の文字の連を先に作り、その間と両端の隙間へ他方の正の連を配置する。始端・終端の場合分けを隙間選択として数える。

【解答】

(1) h 個の球の間の $h - 1$ 個の隙間から $k - 1$ 個を仕切りとして選ぶので

$${}_{h-1}C_{k-1}.$$

(2) a の p 個の連を並べると、その間に $p - 1$ 個、両端を含めて計 $p + 1$ 個の隙間がある。 b の連は内部の隙間には必ず入り、両端には 0 個、1 個、2 個入ることができる。したがって

$$q = p - 1, p, p + 1$$

であり、 $1 \leq q \leq 5$ を課すと

p	q
1	1, 2
2	1, 2, 3
3	2, 3, 4
4	3, 4, 5
5	4, 5
6	5

となる。

(3) a を p 個の正の連へ分ける方法は ${}_6C_{p-1}$ 、 b を q 個へ分ける方法は ${}_4C_{q-1}$ である。総連数 4 では $(p, q) = (2, 2)$ で、両端のどちらに a を置くか 2 通りだから

$$2 {}_6C_1 {}_4C_1 = 48.$$

総連数 7 では $(3, 4), (4, 3)$ なので

$${}_6C_2 {}_4C_3 + {}_6C_3 {}_4C_2 = 180.$$

総連数 11 では $(6, 5)$ なので

$${}_6C_5 {}_4C_4 = 6.$$

全体は ${}_{12}C_7 = 792$ 通りだから、確率は順に

$$\frac{2}{33}, \quad \frac{5}{22}, \quad \frac{1}{132}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 30 分。連の個数を直接列で数えるのではなく、各文字を正の長さのブロックに分けてから交互に並べると見通しがよい。(3) では $p = q$ のときだけ始まりの文字が 2 通りある点が重要で、ここを忘れると連の総数 4 の場合などが半分になる。 a は 7 個、 b は 5 個なので、分割数がそれぞれ ${}_6C_{p-1}$ 、 ${}_4C_{q-1}$ になることも丁寧に確認したい。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 5 問】

a, b, r は正の定数とする. xy 平面上で, 点 P, Q をそれぞれ x 軸, y 軸上にとり $PQ = r$ とする. 線分 PQ を P 側へ延長して $AP = a$ となる点 A をとり, また, 線分 PQ を Q 側へ延長して $BQ = b$ となる点 B をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 P, Q がそれぞれ x 軸上, y 軸上を動くとき, 点 A が描く曲線を C_1 , 点 B が描く曲線を C_2 とする. 曲線 C_1, C_2 の方程式を a, b, r を用いて表せ.
- (2) $r = 2(\sqrt{3} - 1)$, $a = 2$, $b = 2$ のときに曲線 C_1 に囲まれる領域と, 曲線 C_2 に囲まれる領域の重なり合う部分の面積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$PQ = r$ なので, P と Q の位置を $P = (r \cos \theta, 0)$, $Q = (0, r \sin \theta)$ とおく. 線分 PQ の延長方向を使って A, B の座標を表せば, $\cos \theta, \sin \theta$ を消去して 2 つの楕円が得られる. 指定値では 2 つの楕円が対称になり, 共通部分は 4 象限で同じなので, 第 1 象限で上側境界が切り替わる交点 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ を境に積分する.

【解答】

(1) P を x 軸上, Q を y 軸上に取り $PQ = r$ とする. 向きを表すために $P = (r \cos \theta, 0)$, $Q = (0, r \sin \theta)$ とおく. $P - Q = (r \cos \theta, -r \sin \theta)$ である. A は PQ を P 側へ延長し, $AP = a$ となる点なので $A = P + \frac{a}{r}(P - Q) = ((r+a) \cos \theta, -a \sin \theta)$ である. したがって $A = (x, y)$ とおけば $\frac{x^2}{(r+a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ であり, $C_1: \frac{x^2}{(r+a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ である.

同様に, B は PQ を Q 側へ延長し, $BQ = b$ となる点なので $B = Q + \frac{b}{r}(Q - P) = (-b \cos \theta, (r+b) \sin \theta)$ である. したがって $C_2: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(r+b)^2} = 1$ である.

(2) $r = 2(\sqrt{3} - 1)$, $a = b = 2$ のとき $r + a = 2\sqrt{3}$, $r + b = 2\sqrt{3}$ である. したがって

$$C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

である.

2 つの楕円は x 軸, y 軸および直線 $y = x$ に関して対称である. 第 1 象限の交点を求めると, 2 式を引いて

$$\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)y^2 = 0$$

より $x^2 = y^2$ で, 第 1 象限では $x = y$ である. これを C_1 に代入して $\frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{4} = 1$ だから $x^2 = 3$ であり, 交点は $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ である.

第 1 象限で, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ では C_1 の上側が低く, $\sqrt{3} \leq x \leq 2$ では C_2 の上側が低い. よって共通部分の面積は

$$4 \left\{ \int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{12}} dx + \int_{\sqrt{3}}^2 2\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx \right\}$$

である.

第 1 の積分では $x = 2\sqrt{3}\sin u$ とおく. $x = 0$ から $\sqrt{3}$ までで u は 0 から $\pi/6$ まで動くので

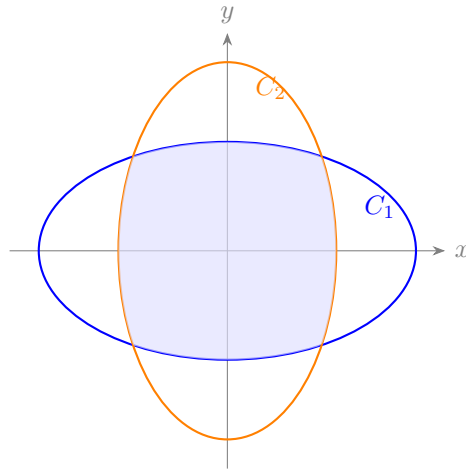
$$\int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{12}} dx = 4\sqrt{3} \int_0^{\pi/6} \cos^2 u du = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{3}{2}$$

である. 第 2 の積分では $x = 2\sin u$ とおくと, u は $\pi/3$ から $\pi/2$ まで動くので

$$\int_{\sqrt{3}}^2 2\sqrt{3}\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = 4\sqrt{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} - \frac{3}{2}$$

である.

したがって第 1 象限の面積は $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ であり, 全体の面積はその 4 倍だから $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ である.



▶ 解法 2

【方針】

指定値では原点中心の 2 楕円になるので極座標で共通部分の動径を比較する。直線 $\theta = \pi/4$ で境界が切り替わる。

【解答】

(1)

$$P = (r \cos \theta, 0), \quad Q = (0, r \sin \theta)$$

とおく。延長方向から

$$A = ((r+a) \cos \theta, -a \sin \theta), \quad B = (-b \cos \theta, (r+b) \sin \theta).$$

よって

$$C_1: \frac{x^2}{(r+a)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad C_2: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(r+b)^2} = 1.$$

(2) 指定値では

$$C_1: \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

極座標 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ では

$$\rho_1^2 = \frac{12}{\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta}, \quad \rho_2^2 = \frac{12}{3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}.$$

第 1 象限の $0 \leq \theta \leq \pi/4$ では $\rho_2 \leq \rho_1$ であり、残りは対称である。したがって第 1 象限の共通面積は

$$\int_0^{\pi/4} \frac{12}{3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} d\theta.$$

$u = \tan \theta$ とおけば

$$12 \int_0^1 \frac{du}{3+u^2} = 4\sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$

全体はその 4 倍だから

$$\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安は 36 分。(1) では延長方向をベクトルで表すと、楕円の長半径・短半径が自然に出る。 A と B の符号が逆になるため、座標を暗算で置くと間違いやすい。(2) は 2 つの楕円の共通部分で、対称性により第 1 象限だけ積分すればよい。交点 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ で上側境界が切り替わること、2 つの積分の $\pm 3/2$ が打ち消し合うことが計算の検算になる。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 6 問】

実数 b, d と正の数 c に対して、関数 $f(x) = x^3 + bx^2 - cx + d$ 、および、 $f(x)$ と y 軸に関して対称なグラフをもつ関数 $g(x)$ について次の問いに答えよ。

- (1) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ との交点の x 座標、および、点 $(0, d)$ で曲線 $y = g(x)$ に接する直線 l と曲線 $y = f(x)$ との交点の x 座標をそれぞれ求めよ。
- (2) 直線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる領域の面積 S_1 を b, c, d で表せ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ で囲まれる領域の面積 S_2 が $S_1 = 11S_2$ を満たすための b, c, d の条件を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$g(x)$ は $f(x)$ を y 軸対称にした関数なので $g(x) = f(-x)$ である。(1) は $f = g$ と $f = l$ をそれぞれ因数分解して交点の x 座標を出す。(2) は $f(x) - l(x) = x(x^2 + bx - 2c)$ の 3 つの根を用いて、正負の区間に分けて面積を積分する。(3) は $f - g = 2x(x^2 - c)$ から S_2 を求め、 $S_1 = 11S_2$ を b^2 について解く。

【解答】

y 軸に関して対称なグラフは x を $-x$ に替えればよいので $g(x) = f(-x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$ である。

(1) まず $f(x) = g(x)$ を解く。 $x^3 + bx^2 - cx + d = -x^3 + bx^2 + cx + d$ より $2x^3 - 2cx = 2x(x^2 - c) = 0$ である。 $c > 0$ だから、交点の x 座標は $-\sqrt{c}, 0, \sqrt{c}$ である。

次に、点 $(0, d)$ で $y = g(x)$ に接する直線 l を求める。 $g'(x) = -3x^2 + 2bx + c$ なので $g'(0) = c$ である。したがって $l: y = cx + d$ である。 l と $y = f(x)$ の交点は $x^3 + bx^2 - cx + d = cx + d$ すなわち $x(x^2 + bx - 2c) = 0$ を満たす。よって x 座標は $0, \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8c}}{2}, \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8c}}{2}$ である。

(2) $f(x) - l(x) = x^3 + bx^2 - 2cx = x(x^2 + bx - 2c)$ である。2 次方程式 $x^2 + bx - 2c = 0$ の 2 解を

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8c}}{2} > 0, \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8c}}{2} < 0$$

とおく。 $f - l$ は $[\beta, 0]$ で正、 $[0, \alpha]$ で負であるから

$$S_1 = \int_{\beta}^0 (f(x) - l(x)) dx - \int_0^{\alpha} (f(x) - l(x)) dx$$

である。

原始関数は

$$\int (x^3 + bx^2 - 2cx) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3} - cx^2$$

である。ここで α, β は $x^2 + bx - 2c = 0$ の解なので、 $\alpha + \beta = -b$ 、 $\alpha\beta = -2c$ を用いて整理すると $S_1 = \frac{b^4 + 12b^2c + 24c^2}{12}$ となる。

(3) f と g の差は $f(x) - g(x) = 2x^3 - 2cx = 2x(x^2 - c)$ である。2 曲線は $x = -\sqrt{c}, 0, \sqrt{c}$ で交わり、対称性から面積は

$$S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{c}} 2x(c - x^2) dx$$

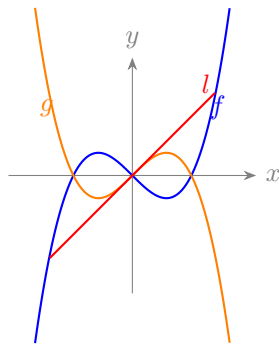
である。よって

$$S_2 = 4 \left[\frac{cx^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{c}} = 4 \left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) = c^2$$

である。

条件 $S_1 = 11S_2$ は $\frac{b^4 + 12b^2c + 24c^2}{12} = 11c^2$ である。整理して $b^4 + 12b^2c - 108c^2 = 0$ を得る。 $u = b^2$ とおくと $u^2 + 12cu - 108c^2 = 0$ であり、 $c > 0$ だから $u = 6c$ 、 $-18c$ のうち非負であり得るのは $u = 6c$ だけである。したがって $b^2 = 6c$ である。 d は面積にも交点の差にも影響しないので任意である。

よって条件は $c > 0$ 、 $b^2 = 6c$ 、 d は任意の実数 である。



▶ 解法 2

【方針】

S_1 は 2 つの非零交点を 2 次方程式の根と見て、原始関数の根での値を対称式だけで計算する。

【解答】

(1)

$$g(x) = f(-x) = -x^3 + bx^2 + cx + d.$$

したがって $f = g$ の交点の x 座標は

$$-\sqrt{c}, \quad 0, \quad \sqrt{c}.$$

$g'(0) = c$ なので接線は $l: y = cx + d$ 。 $f = l$ は

$$x(x^2 + bx - 2c) = 0$$

より

$$0, \quad \frac{-b + \sqrt{b^2 + 8c}}{2}, \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 + 8c}}{2}.$$

(2) $x^2 + bx - 2c = 0$ の 2 根を $\alpha > 0, \beta < 0$ とする。

$$H(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3} - cx^2$$

とおけば $H' = f - l$ であり

$$S_1 = -H(\alpha) - H(\beta).$$

$\alpha + \beta = -b, \alpha\beta = -2c$ から

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= b^2 + 4c, \\ \alpha^3 + \beta^3 &= -b^3 - 6bc, \\ \alpha^4 + \beta^4 &= b^4 + 8b^2c + 8c^2. \end{aligned}$$

これらを代入すると

$$S_1 = \frac{b^4 + 12b^2c + 24c^2}{12}.$$

(3) 2 曲線の差は $2x(x^2 - c)$ なので

$$S_2 = 2 \int_0^{\sqrt{c}} 2x(c - x^2) dx = c^2.$$

$S_1 = 11S_2$ を整理すると

$$b^4 + 12b^2c - 108c^2 = 0.$$

$u = b^2 \geq 0$ とおけば $u = 6c, -18c$ であり、 $c > 0$ から

$$b^2 = 6c.$$

d は任意の実数である。

【総評】 難度 7、計算量 7、目安 32 分。対称性 $g(x) = f(-x)$ から交点を出し、 S_1 は符号別積分を根の対称式で整理する。結論は $c > 0, b^2 = 6c, d$ は任意である。