

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2000 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, p, q を実数とする.

(1) $(aE + bK)^2 = pE + qK$ となる実数 a, b が存在するためには, p, q がどんな条件を満たすことが必要十分であるか.

(2) p, q が $p^2 + q^2 = 2$ を満たし, さらに

$$(aE + bK)^2 = pE + qK$$

$$(cE + dK)^2 = qE - pK$$

となる実数 a, b, c, d が存在するとする. このとき, p, q の値を求めよ.

第 2 問

α, β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする. このとき関数 $f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ.

第 3 問

実数 a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき、関数 $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(x) = f(x)$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。
- (3) $f^{-1}(x) = f(f(x))$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

第 4 問

数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする．一つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする．また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする．このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ．

第 5 問

$0 < t < 1$ として、頂点が $O(0, 0)$, $A(t, 0)$, $B(0, 1)$ である三角形と、頂点が O , $P(1-t, 0)$, $Q(1-t, 1-t)$, $R(0, 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき、 S を t の式で表せ。また、 S を最大にする t の値を求めよ。

第 6 問

数列 $\{\alpha_n\}$ を初項 $\frac{4}{5}$ ，公比 2 の等比数列，数列 $\{\beta_n\}$ を初項 $\frac{1}{5}$ ，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列とする．

- (1) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき， α_n の少数部分を求めよ．
- (2) $a_n = \alpha_n + \beta_n$ の少数部分 b_n を求めよ．
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)