

東北大学 2000 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, p, q を実数とする.

(1) $(aE + bK)^2 = pE + qK$ となる実数 a, b が存在するためには, p, q がどんな条件を満たすことが必要十分であるか.

(2) p, q が $p^2 + q^2 = 2$ を満たし, さらに

$$(aE + bK)^2 = pE + qK$$

$$(cE + dK)^2 = qE - pK$$

となる実数 a, b, c, d が存在するとする. このとき, p, q の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$K^2 = E$ を使って $(aE + bK)^2$ を E と K の係数で比較する. $p = a^2 + b^2$, $q = 2ab$ から $p + q = (a + b)^2$, $p - q = (a - b)^2$ という 2 つの平方条件に直すのが核心である. 後半は同じ条件を $pE + qK$ と $qE - pK$ の両方に適用し, $p^2 + q^2 = 2$ と合わせて値を確定する.

【解答】

(1) $K^2 = E$, $EK = KE = K$ であるから $(aE + bK)^2 = a^2E + abK + baK + b^2K^2 = (a^2 + b^2)E + 2abK$ である. したがって $p = a^2 + b^2$, $q = 2ab$ でなければならない. このとき $p + q = (a + b)^2 \geq 0$, $p - q = (a - b)^2 \geq 0$ であるから $p \geq |q|$ が必要である.

逆に $p \geq |q|$ とする. このとき $p + q \geq 0$, $p - q \geq 0$ なので $a + b = \sqrt{p + q}$, $a - b = \sqrt{p - q}$ を満たす実数 a, b を取ることができる. この a, b について $a^2 + b^2 = p$, $2ab = q$ が成り立つ. よって必要十分条件は $p \geq |q|$ である.

(2) 第 1 の式 $(aE + bK)^2 = pE + qK$ に対して (1) を用いると $p \geq |q|$ である. 第 2 の式 $(cE + dK)^2 = qE - pK$ に対して (1) を用いると, E の係数が q , K の係数が $-p$ だから $q \geq |-p| = |p|$ である.

前者から $p \geq 0$, 後者から $q \geq 0$ である. また $p \geq |q|$ より $p \geq q$, $q \geq |p|$ より $q \geq p$ なので $p = q \geq 0$ となる. さらに $p^2 + q^2 = 2$ より $2p^2 = 2$ であるから, $p \geq 0$ に注意して $p = q = 1$ を得る.

▶ 解法 2

【方針】

$E + K$ と $E - K$ を同時固有方向として用い, 平方根の存在を 2 つの実数の平方条件へ分解する.

【解答】

(1)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$U^{-1}KU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

したがって

$$U^{-1}(aE + bK)^2U = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix},$$

一方

$$U^{-1}(pE + qK)U = \begin{pmatrix} p+q & 0 \\ 0 & p-q \end{pmatrix}.$$

よって実数 a, b が存在するための必要十分条件は

$$p + q \geq 0, \quad p - q \geq 0,$$

すなわち $p \geq |q|$ である。

(2) 第 1 の平方根の存在から $p \geq |q|$ 、第 2 の平方根の存在から

$$q \geq |-p| = |p|$$

を得る。したがって $p, q \geq 0$ かつ $p = q$ である。

$$p^2 + q^2 = 2$$

へ代入すると $2p^2 = 2$ なので

$$p = q = 1.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安は 20 分。 $K^2 = E$ に気づけば計算は短い、必要条件だけで止めず、 $a + b$ 、 $a - b$ を指定して十分性まで示すのが重要である。(2) では第 2 式に対して条件を適用するとき、 $qE - pK$ の K 係数は $-p$ であるため $q \geq |p|$ になる。ここを $q \geq p$ だけで済ませると符号条件が弱く見えるので注意したい。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性と十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 2 問】

α, β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数 $f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$ の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$|\alpha + \beta|/2$ と $|\alpha| + |\beta|$ をそれぞれ係数として置き直し、二次関数の単調性を調べる。条件 $|\alpha + \beta| < 2$ から 2 次係数側は 1 未満になり、三角不等式から一次係数側は十分大きい。これにより $0 \leq x \leq 1$ で導関数が非正になるので、最小値は右端 $x = 1$ で得られる。

【解答】

$A = \frac{|\alpha + \beta|^2}{4}$, $B = |\alpha| + |\beta|$ とおく。すると $f(x) = A^2 x^2 - Bx + 1$ である。仮定 $|\alpha + \beta| < 2$ より $0 \leq A < 1$ である。また三角不等式から $B = |\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta| = 2A$ が成り立つ。 $0 \leq x \leq 1$ において $f'(x) = 2A^2 x - B$ である。上の不等式を用いると $f'(x) \leq 2A^2 - B \leq 2A^2 - 2A = 2A(A - 1) \leq 0$ である。したがって $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で単調減少である。 $A = 0$ の場合も $B \geq 0$ なので同じ結論が成り立つ。

よって最小値は $x = 1$ で取り、その値は $f(1) = 1 + \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - (|\alpha| + |\beta|)$ である。したがって求める最小値は $1 + \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta|$ である。

▶ 解法 2

【方針】

二次関数の頂点の位置を直接評価する。三角不等式によって頂点が区間の右側にあることを示す。

【解答】

次の 2 量をおく。

$$A = \frac{|\alpha + \beta|}{2}, \quad B = |\alpha| + |\beta|.$$

すると $0 \leq A < 1$ であり、三角不等式から $B \geq 2A$ である。関数は

$$f(x) = A^2 x^2 - Bx + 1.$$

$A > 0$ のとき頂点の x 座標は

$$x_0 = \frac{B}{2A^2} \geq \frac{2A}{2A^2} = \frac{1}{A} > 1.$$

したがって区間 $0 \leq x \leq 1$ は頂点より左にあり、 f はこの区間で減少する。 $A = 0$ のときは $f(x) = 1 - Bx$ であり、やはり減少または一定である。

よって最小値は $x = 1$ で取り、

$$\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = 1 + \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta|$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 4。目安は 18 分。複素数そのものを詳しく調べる問題ではなく、 $|\alpha + \beta|$ と $|\alpha| + |\beta|$ の大小関係を二次関数の単調性へ渡す問題である。三角不等式から $B \geq 2A$ を作るのが決定的で、ここを落とすと頂点の位置を判断できない。 $A = 0$ 、すなわち $\alpha + \beta = 0$ の場合も含まれるので、導関数評価でまとめて処理すると端の抜けがない。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 3 問】

実数 a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき、関数 $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(x) = f(x)$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。
- (3) $f^{-1}(x) = f(f(x))$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

一次分数関数は、係数 a, b, c, d を同時に 0 でない同じ定数倍しても同じ関数を表す。この性質を使い、係数行列 M で逆関数と合成を管理する。逆関数は直接解き、 $f^{-1} = f$ は M^2 が単位行列の定数倍、 $f^{-1} = f \circ f$ は M^3 が単位行列の定数倍になる条件として、恒等関数でない場合を除いて整理する。

【解答】

(1) $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ とおく。両辺に $cx + d$ を掛けて $y(cx + d) = ax + b$ すなわち $(cy - a)x = b - dy$ である。 $ad - bc \neq 0$ なので逆関数が存在し、 $x = \frac{dy - b}{-cy + a}$ となる。したがって $f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$ である。

(2) 一次分数関数 $(ax + b)/(cx + d)$ は、係数 a, b, c, d を同時に 0 でない定数倍しても同じ関数を表す。そこで

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと、合成 $f \circ f$ は M^2 に対応する。 $f^{-1} = f$ は $f \circ f$ が恒等関数であることと同値だから、 M^2 が単位行列の定数倍になる条件を調べればよい。

計算すると

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

である。これが単位行列の定数倍になるには $b(a+d)=0$, $c(a+d)=0$, $a^2+bc=d^2+bc$ が必要である。最後の式は $(a-d)(a+d)=0$ である。もし $a+d \neq 0$ なら $b=c=0$ かつ $a=d$ となり、 $f(x)=x$ になってしまう。問題では $f(x) \neq x$ なので、この場合は除かれる。

したがって求める条件は $a+d=0$ である。このとき $ad-bc \neq 0$ のもとで M^2 は単位行列の定数倍となり、 $f(x) \neq x$ も保たれる。

(3) $f^{-1} = f(f(x))$ は、両辺に f を合成して $f \circ f \circ f$ が恒等関数であることと同値である。つまり M^3 が単位行列の定数倍になればよい。 M については $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I = O$ が成り立つので、両辺に M を掛けて整理すると $M^3 = \{(a+d)^2 - (ad-bc)\}M - (a+d)(ad-bc)I$ である。 $f(x) \neq x$ なので M 自身は単位行列の定数倍ではない。したがって M^3 が単位行列の定数倍になるためには、 M の係数が 0 でなければならない。よって $(a+d)^2 - (ad-bc) = 0$ すなわち $(a+d)^2 = ad-bc$ である。逆にこの条件が成り立てば上の式より M^3 は単位行列の定数倍となるから、 $f^{-1} = f(f(x))$ が成り立つ。

▶ 解法 2

【方針】

一次分数関数の等式を分母を払って直接比較する。(2) は 2 回合成、(3) は 3 回合成が恒等変換となる条件に直す。

【解答】

(1)

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

を x について解けば

$$x = \frac{dy-b}{-cy+a}$$

だから

$$f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}.$$

(2) $f^{-1} = f$ は $f(f(x)) = x$ と同値である。直接合成すると

$$f(f(x)) = \frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+bc+d^2}.$$

これが恒等的に x に等しいため、係数比較から

$$c(a+d)=0, \quad b(a+d)=0, \quad a^2=d^2$$

を得る。 $a+d \neq 0$ なら $b=c=0$, $a=d$ となって $f(x)=x$ なので除外される。よって、求める条件は

$$a+d=0.$$

(3) $f^{-1} = f \circ f$ は f^3 が恒等変換であることと同値である。係数行列

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

の固有値を λ, μ とすると、恒等変換でない場合に M^3 が単位行列の定数倍となる条件は

$$\lambda^3 = \mu^3, \quad \lambda \neq \mu.$$

実係数なので λ/μ は 1 でない 3 乗根となり、

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{1}\right)^2 = \lambda\mu$$

が成り立つ。ここで $\lambda+\mu = a+d$, $\lambda\mu = ad-bc$ だから

$$(a+d)^2 = ad-bc.$$

逆にこの条件のもとでは特性方程式から M^3 は単位行列の定数倍となるため、十分でもある。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安は 28 分。一次分数関数では係数の組が定数倍までしか決まらないため、係数をそのまま等号で比較しないことが重要である。(2) は $f \circ f$ が恒等関数、(3) は $f \circ f \circ f$ が恒等関数という見方に変えると、逆関数との関係が整理される。 $f(x) \neq x$ の条件は、 M が単位行列の定数倍になる退化的な場合を除くために必要で、最後に必ず確認したい。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 4 問】

数直線上を、原点 O から出発して動く点 A があるとする。一つのさいころを振り、その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし、出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし、出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき、さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

5 回の移動量の和が 0 になる出方を数える。移動量は $+1, +2, -1, -2$ だが、 $+2$ と -2 はそれぞれ 2 つの目に対応するので、単なる符号列ではなく目の重みを含めて数える必要がある。 $+1, +2, -1, -2$ の出現回数を文字でおき、回数の和と移動量の和の 2 条件を満たす組を列挙して、最後に各組の並べ方と目の選び方を掛ける。

【解答】

1 回の移動量は、出た目ごとに

$$1 \mapsto +1, \quad 2, 3 \mapsto +2, \quad 4 \mapsto -1, \quad 5, 6 \mapsto -2$$

である。5 回のうち、 $+1, +2, -1, -2$ が出る回数をそれぞれ a, b, c, d とする。5 回振るので $a + b + c + d = 5$ であり、5 回後に原点にある条件は $a + 2b - c - 2d = 0$ である。

この 2 式を満たす非負整数の組を調べると $(a, b, c, d) = (0, 2, 2, 1), (1, 1, 3, 0), (2, 1, 0, 2), (3, 0, 1, 1)$ である。それぞれについて、 $+2$ の各回には 2 通り、 -2 の各回にも 2 通りの目があるから、該当する出方の数は

(a, b, c, d)	出方の数
$(0, 2, 2, 1)$	$\frac{5!}{0!2!2!1!} 2^{2+1} = 240$
$(1, 1, 3, 0)$	$\frac{5!}{1!1!3!0!} 2^{1+0} = 40$
$(2, 1, 0, 2)$	$\frac{5!}{2!1!0!2!} 2^{1+2} = 240$
$(3, 0, 1, 1)$	$\frac{5!}{3!0!1!1!} 2^{0+1} = 40$

である。したがって原点に戻る出方は $240 + 40 + 240 + 40 = 560$ 通りである。

全事象は 6^5 通りなので、求める確率は $\frac{560}{6^5} = \frac{560}{7776} = \frac{35}{486}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

1 回の移動を Laurent 多項式で表し、5 乗の定数項を求める。指数が 0 になる項だけを、正負の 1 歩・2 歩の個数に分けて抽出する。

【解答】

1 回のさいころ投げに対し、移動後の位置を x の指数で記録する母関数を

$$F(x) = x + 2x^2 + x^{-1} + 2x^{-2}$$

とする。5 回後に原点へ戻る出方の数は $F(x)^5$ の定数項である。

$+1, +2, -1, -2$ を選ぶ回数を a, b, c, d とすると、定数項を作る条件は

$$a + b + c + d = 5, \quad a + 2b - c - 2d = 0.$$

第 2 式を第 1 式と合わせて調べると

$$(a, b, c, d) = (0, 2, 2, 1), (1, 1, 3, 0), (2, 1, 0, 2), (3, 0, 1, 1)$$

だけである。したがって定数項は

$$\begin{aligned} [x^0]F(x)^5 &= \frac{5!}{2!2!1!}2^3 + \frac{5!}{1!1!3!}2 + \frac{5!}{2!1!2!}2^3 + \frac{5!}{3!1!1!}2 \\ &= 240 + 40 + 240 + 40 = 560. \end{aligned}$$

全事象は 6^5 通りだから、求める確率は

$$\frac{560}{6^5} = \frac{35}{486}.$$

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安は 18 分。移動量の和を 0 にするだけなら標準的だが、 $+2$ と -2 に対応する目が 2 個ずつあるため、回数の並べ方だけで終わらせると半分以上を数え落とす。答案では、回数条件 $a + b + c + d = 5$ 、位置条件 $a + 2b - c - 2d = 0$ 、各組の重み 2^{b+d} を順に書くと採点しやすい。生成関数で解く場合も、最後は定数項に対応する組を明示しておくこと計算の検算になる。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性と十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 5 問】

$0 < t < 1$ として、頂点が $O(0, 0)$, $A(t, 0)$, $B(0, 1)$ である三角形と、頂点が O , $P(1-t, 0)$, $Q(1-t, 1-t)$, $R(0, 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき、 S を t の式で表せ。また、 S を最大にする t の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

共通部分を x 方向に切り、三角形の上端 $y = 1 - x/t$ と正方形の上端 $y = 1 - t$ の小さい方を積分する。横幅の右端は $\min(t, 1-t)$ 、上端が入れ替わる点は $1 - x/t = 1 - t$ から $x = t^2$ である。したがって $t = 1/2$ と $t^2 = 1 - t$ を境に 3 区間へ分け、各区間の式を出してから最大値を比較する。

【解答】

三角形 OAB は $0 \leq x \leq t$, $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{t}$ で表される。正方形は $0 \leq x \leq 1-t$, $0 \leq y \leq 1-t$ である。2 つの上端 $y = 1 - \frac{x}{t}$, $y = 1 - t$ が交わるのは $1 - \frac{x}{t} = 1 - t$ より $x = t^2$ である。

1. $0 < t \leq 1/2$ のとき、 $t \leq 1-t$ なので横幅は $0 \leq x \leq t$ である。 $0 \leq x \leq t^2$ では正方形の上端が低く、 $t^2 \leq x \leq t$ では三角形の上端が低い。したがって

$$S = \int_0^{t^2} (1-t) dx + \int_{t^2}^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) dx = \frac{t(1-t^2)}{2}$$

である。

2. $1/2 \leq t \leq (\sqrt{5}-1)/2$ のとき、横幅は $0 \leq x \leq 1-t$ で、さらに $t^2 \leq 1-t$ である。よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{t^2} (1-t) dx + \int_{t^2}^{1-t} \left(1 - \frac{x}{t}\right) dx \\ &= -\frac{t^4 + 3t^2 - 4t + 1}{2t} \end{aligned}$$

である。

3. $(\sqrt{5}-1)/2 \leq t < 1$ のとき、 $1-t \leq t^2$ であるから、正方形全体が三角形の下に入る。したがって $S = (1-t)^2$ である。

以上より

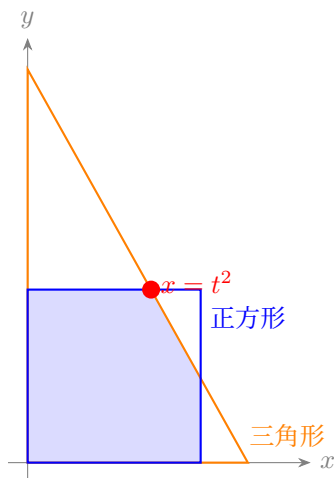
$$S = \begin{cases} \frac{t(1-t^2)}{2} & \left(0 < t \leq \frac{1}{2}\right), \\ -\frac{t^4 + 3t^2 - 4t + 1}{2t} & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \\ (1-t)^2 & \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq t < 1\right) \end{cases}$$

である。

最大を調べる。第 1 区間では $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{t(1-t^2)}{2} \right\} = \frac{1-3t^2}{2}$ であり、 $0 < t \leq 1/2$ では正なので増加する。第 3 区間では $(1-t)^2$ は減少する。したがって最大の候補は第 2 区間の内部または端点である。

第 2 区間で $S = -\frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t + 2 - \frac{1}{2t}$ だから $S' = -\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2}$ である。 $S' = 0$ より $3t^4 + 3t^2 - 1 = 0$ となる。 $u = t^2$

とおくと $3u^2 + 3u - 1 = 0$ なので、 $u > 0$ より $t^2 = \frac{\sqrt{21}-3}{6}$ である。よって $t = \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{6}}$ のとき最大となる。この値は実際に $1/2 \leq t \leq (\sqrt{5}-1)/2$ に入る。



▶ 解法 2

【方針】

共通部分を、三角形または正方形から上にはみ出す小三角形を引く図形計算で求める。境界 $t = 1/2$ と $t^2 = 1 - t$ で場合分けする。

【解答】

三角形の斜辺は

$$y = 1 - \frac{x}{t}$$

であり、正方形の上辺 $y = 1 - t$ との交点は $x = t^2$ である。

(i) $0 < t \leq 1/2$

三角形は正方形より横に狭い。三角形の面積 $t/2$ から、上辺より上に出る小三角形を引く。この小三角形の底辺は t^2 、高さは t なので

$$S = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{2} = \frac{t(1-t^2)}{2}.$$

(ii) $1/2 \leq t \leq (\sqrt{5}-1)/2$

共通部分の横幅は $1-t$ で、斜辺と上辺の交点 t^2 はその内部にある。幅 $1-t$ までの三角形台形から、上辺より上の小三角形を引くと

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (1-t) - \frac{(1-t)^2}{2t} \right\} - \frac{t^3}{2} \\ &= -\frac{t^4 + 3t^2 - 4t + 1}{2t}. \end{aligned}$$

(iii) $(\sqrt{5}-1)/2 \leq t < 1$

$1-t \leq t^2$ なので正方形全体が三角形に含まれ、

$$S = (1-t)^2.$$

第 1 区間では S は増加し、第 3 区間では減少する。第 2 区間では

$$S' = -\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2}.$$

したがって

$$3t^4 + 3t^2 - 1 = 0$$

を満たす

$$t = \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{6}}$$

で最大となる。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安は 34 分。図形自体は単純だが、横幅の端 t と $1-t$ 、上端の交点 t^2 の大小関係で場合分けが必要になる。 $t = 1/2$ と $t^2 = 1-t$ の 2 つの境目を混同しないことが最重要である。最大値の判定では、両端区間が単調であることを確認してから中央区間の微分に進むと、候補の漏れがなくなる。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。

【第 6 問】

数列 $\{\alpha_n\}$ を初項 $\frac{4}{5}$, 公比 2 の等比数列, 数列 $\{\beta_n\}$ を初項 $\frac{1}{5}$, 公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列とする.

- (1) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき, α_n の少数部分を求めよ.
- (2) $a_n = \alpha_n + \beta_n$ の少数部分 b_n を求めよ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$\alpha_n = 2^{n+1}/5$ なので, 小数部分は 2 の累乗を 5 で割った余りにより周期 4 になる. β_n は絶対値が急速に小さい交代等比数列で, $n = 1$ だけ $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ となる点を別扱いする. $n \geq 2$ では α_n の小数部分に β_n を足しても整数境界を越えないことを確認し, 100 項和は周期和と等比数列の和で評価する.

【解答】

(1) $\alpha_n = \frac{4}{5} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n+1}}{5}$ である. 2^k を 5 で割った余りは 2, 4, 3, 1 を周期 4 で繰り返す. したがって $n = 1, 2, 3, 4, 5$ に対する α_n の小数部分は $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ である.

(2) $\beta_n = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である. まず $n = 1$ では $a_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$ なので $b_1 = 0$ である.

次に $n \geq 2$ を考える. $|\beta_n| \leq 1/10$ であり, α_n の小数部分は $1/5, 2/5, 3/5, 4/5$ のいずれかである. 負の β_n を足しても 0 未満にならず, 正の β_n を足しても 1 以上にならない. したがって $n \geq 2$ では $b_n = \left\{ \frac{2^{n+1}}{5} \right\} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である. ただし $\{ \}$ は小数部分を表す.

(3) α_n の小数部分は 4 項で $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 2$ となる. 100 項は 25 周期なので, α_n の小数部分の和は $25 \cdot 2 = 50$ である.

しかし b_1 では α_1 の小数部分 $4/5$ と $\beta_1 = 1/5$ が合わさって整数 1 になり, 小数部分は 0 である. したがって

$$\sum_{n=1}^{100} b_n = 50 - \frac{4}{5} + \sum_{n=2}^{100} \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である. 等比数列の和より

$$\sum_{n=2}^{100} \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{-\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} \right\}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{15} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} \right\}$$

である. よってこの和は $50 - \frac{4}{5} - \frac{1}{15} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} \right\}$ であり, これは 49 より大きく 50 より小さい. したがって初項から第 100 項までの和の整数部分は 49 である.

▶ 解法 2

【方針】

a_n を 1 本の式にして、2 の冪の 5 を法とする周期と小さな補正項を 4 項ずつまとめる。

【解答】

(1)

$$\alpha_n = \frac{2^{n+1}}{5}.$$

2^k の 5 を法とする余りは 2, 4, 3, 1 の周期 4 だから、 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の小数部分は

$$\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}.$$

(2)

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{5} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$n = 1$ では $a_1 = 1$ なので $b_1 = 0$ である。 $n \geq 2$ では第 2 項の絶対値は $1/10$ 以下で、第 1 項の小数部分は $1/5, 2/5, 3/5, 4/5$ のいずれかだから、整数の繰り上がり・繰り下がりはない。よって

$$b_n = \left\{ \frac{2^{n+1}}{5} \right\} + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

(3) α_n の小数部分は 4 項の和が 2 であり、100 項では 50 になる。ただし第 1 項では $4/5 + 1/5 = 1$ となるため $4/5$ を引く。さらに

$$\sum_{n=2}^{100} \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{15} \left(1 + \frac{1}{2^{99}}\right).$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{100} b_n = 50 - \frac{4}{5} - \frac{1}{15} \left(1 + \frac{1}{2^{99}}\right),$$

これは 49 より大きく 50 より小さい。よって整数部分は

$$49.$$

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安は 22 分。周期 4 の小数部分と、小さい交代等比数列を組み合わせる問題である。 $n = 1$ だけ小数部分が 0 になるため、ここを通常周期のまま足すと和が 1 だけずれる。 $n \geq 2$ で整数境界を越えないことを一言確認してから和を取ると、 b_n の式に説得力が出る。最後は厳密な値まで出さなくても、49 と 50 の間にあることを示せば整数部分は決まる。2 つの解法は標準的な答案手順と、構造を使って検算できる別経路に分けた。等号条件、範囲、必要性和十分性を明示し、積分・総和・極限および主要な分数は読みやすい表示形式に統一した。