

東北大学 2005 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

曲線 $C_1: y = 4x^2 + \frac{1}{4}$ 上の定点 $P\left(a, 4a^2 + \frac{1}{4}\right)$ から、曲線 $C_2: y = x^2$ 上の点 (x, x^2) までの距離を $h(x)$ とする。

- (1) $|a| \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $h(x)$ が最小値をとる $x = x_0$ と値 $h(x_0)$ を求めよ。
- (2) $a = \frac{1}{2}$ とし、(1) で求めた x_0 について点 (x_0, x_0^2) を Q とおく。曲線 C_1 、 C_2 、 y 軸、および線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

距離はそのままではなく 2 乗 $H(x) = h(x)^2$ を最小化する。 $H'(x)$ を因数分解すると $(x - 2a)(4x^2 + 8ax + 1)$ が現れ、 $|a| \leq 1/2$ では 2 次式部分が常に非負なので、最小点は $x = 2a$ と分かる。(2) では $a = \frac{1}{2}$ により $P = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ 、 $Q = (1, 1)$ となる。囲まれた図形は、 $0 \leq x \leq 1/2$ では $C_1 - C_2$ 、 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ では線分 PQ と C_2 の差を積分する。

【解答】

(1)

点 (x, x^2) と $P\left(a, 4a^2 + \frac{1}{4}\right)$ との距離の 2 乗を $H(x) = h(x)^2 = (x - a)^2 + \left(x^2 - 4a^2 - \frac{1}{4}\right)^2$ とおく。距離 $h(x)$ を最小にする x は、 $H(x)$ を最小にする x と同じである。

微分すると

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2(x - a) + 2\left(x^2 - 4a^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot 2x \\ &= 4x^3 + (1 - 16a^2)x - 2a \\ &= (x - 2a)(4x^2 + 8ax + 1) \end{aligned}$$

である。

ここで $|a| \leq 1/2$ のとき、2 次式 $4x^2 + 8ax + 1$ の判別式は $(8a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16(4a^2 - 1) \leq 0$ である。係数 4 は正なので $4x^2 + 8ax + 1 \geq 0$ がすべての実数 x で成り立つ。したがって $H'(x)$ の符号は $x - 2a$ の符号で決まり、 $H(x)$ は $x = 2a$ で最小値をとる。

よって $x_0 = 2a$ である。このとき $(x_0, x_0^2) = (2a, 4a^2)$ なので、 P との差は $(2a - a, 4a^2 - (4a^2 + \frac{1}{4})) = \left(a, -\frac{1}{4}\right)$ である。したがって $h(x_0) = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{16a^2 + 1}$ である。ゆえに $h(x_0) = \frac{1}{4}\sqrt{16a^2 + 1}$ である。

(2) $a = \frac{1}{2}$ のとき $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ であり、(1) より $x_0 = 1$ だから $Q = (1, 1)$ である。線分 PQ の傾きは $\frac{1 - \frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ な

ので、その方程式は $y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$ である。

求める図形は、 $0 \leq x \leq 1/2$ では上側が $C_1: y = 4x^2 + \frac{1}{4}$ 、下側が $C_2: y = x^2$ である。また $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ では、上側が線分 PQ 、下側が C_2 である。したがって面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(4x^2 + \frac{1}{4} - x^2\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - x^2\right) dx$$

である。

第 1 項は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 + \frac{1}{4} \right) dx = \left[x^3 + \frac{x}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

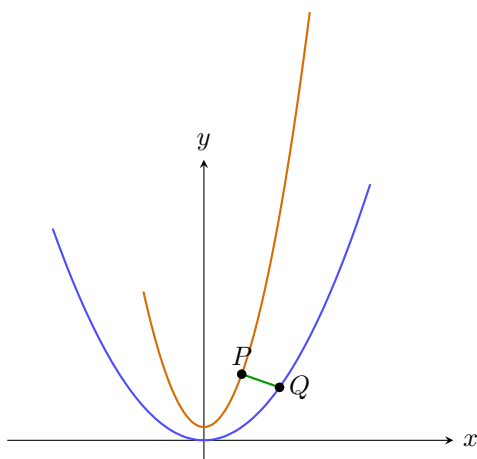
である。第 2 項は

$$\left[\frac{3}{2}x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{13}{48}$$

である。よって $S = \frac{1}{4} + \frac{13}{48} = \frac{25}{48}$ である。したがって $\frac{25}{48}$ である。

条件・検算

因数分解 $H(x) - H(2a)$ は候補点が全体最小であることを直接示す。面積は $x = \frac{1}{2}$ で上側境界が C_1 から線分 PQ へ切り替わる。



▶ 解法 2 (平方差の因数分解による別解)

【方針】

距離の 2 乗 $H(x)$ と候補 $x = 2a$ での値との差を因数分解し、微分せずに全体最小を示す。後半は標準解法と同じ境界分割で面積を確認する。

【解答】

(1)

距離の 2 乗を

$$H(x) = (x - a)^2 + \left(x^2 - 4a^2 - \frac{1}{4} \right)^2$$

とする。直接整理すると

$$H(x) - H(2a) = (x - 2a)^2 \left\{ (x + 2a)^2 + \frac{1}{2} \right\}.$$

右辺は常に 0 以上で、等号は $x = 2a$ のときだけである。したがって

$$x_0 = 2a.$$

このとき座標差は

$$\left(a, -\frac{1}{4} \right)$$

だから

$$h(x_0) = \frac{1}{4} \sqrt{16a^2 + 1}.$$

(2)

$a = \frac{1}{2}$ では

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right), \quad Q = (1, 1),$$

線分 PQ は

$$y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}.$$

よって面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(3x^2 + \frac{1}{4} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - x^2 \right) dx = \frac{25}{48}.$$

【総評】 難度 6、計算量 6。距離の 2 乗を微分する前半と、境界を分けて面積を積分する後半からなる問題である。目安は 22 分程度。(1) では $|a| \leq 1/2$ により 2 次式 $4x^2 + 8ax + 1$ が非負になる点が核心で、これにより $x = 2a$ が最小点と分かる。(2) は線分 PQ が上側境界になる区間が $[\frac{1}{2}, 1]$ だけであることを図で確認してから積分するとよい。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 2 問】

a, b を正の実数とする。 x に関する 4 次方程式

$$x^4 + ax^3 + (2b + 7)x^2 + 2abx + 5b^2 = 0$$

は 4 つの異なる複素数解 $p, \bar{p}, p + 2\bar{p}, 2p + \bar{p}$ をもつとする。このとき a, b の値を求めよ。

【方針】

$p = u + vi$ とおく。4 つの解は $u \pm vi, 3u \pm vi$ であるから、方程式の左辺は 2 つの実係数 2 次式の積として表せる。係数比較で $a = -8u, 3u^2 + v^2 = 2b, 11u^2 + v^2 = b + \frac{7}{2}$ を導き、 $U = u^2$ に関する方程式へ落とす。最後に $a > 0, b > 0, 4$ つの解が相異なることを満たす候補だけを残す。

【解答】

$p = u + vi$ とおく。4 つの解に p と $\bar{p}$ が含まれ、しかも異なる複素数解であるから $v \neq 0$ である。また $p + 2\bar{p} = (u + vi) + 2(u - vi) = 3u - vi$ であり、 $2p + \bar{p} = 2(u + vi) + (u - vi) = 3u + vi$ である。したがって 4 つの解は $u + vi, u - vi, 3u + vi, 3u - vi$ である。

よって方程式の左辺は $\{x^2 - 2ux + u^2 + v^2\}\{x^2 - 6ux + 9u^2 + v^2\}$ に等しい。これを展開して係数を比較する。 x^3 の係数から $a = -8u$ である。 $a > 0$ なので $u < 0$ である。

次に x^2 の係数から $22u^2 + 2v^2 = 2b + 7$ すなわち $11u^2 + v^2 = b + \frac{7}{2}$ を得る。また x の係数から $-24u^3 - 8uv^2 = 2ab$ であり、 $a = -8u$ を代入すると $-24u^3 - 8uv^2 = -16ub$ である。 $u \neq 0$ なので $-8u$ で割って $3u^2 + v^2 = 2b$ を得る。

ここで $U = u^2$ とおく。上の 2 式から $b = \frac{7}{2} - 8U$ であり、さらに $v^2 = 2b - 3U = 7 - 19U$ である。

最後に定数項を比較する。定数項は $(u^2 + v^2)(9u^2 + v^2) = 9u^4 + 10u^2v^2 + v^4$ であり、もとの方程式の定数項は $5b^2$ である。したがって $9U^2 + 10U(7 - 19U) + (7 - 19U)^2 = 5\left(\frac{7}{2} - 8U\right)^2$ である。整理すると $(4U - 1)(20U - 7) = 0$ となる。

よって $U = \frac{1}{4}$ または $U = \frac{7}{20}$ である。 $U = \frac{1}{4}$ のとき、 $u < 0$ より $u = -\frac{1}{2}$ であり、 $a = -8u = 4$ である。また

$b = \frac{7}{2} - 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ である。 $U = \frac{7}{20}$ のとき、 $u < 0$ より $u = -\sqrt{\frac{7}{20}} = -\frac{\sqrt{35}}{10}$ である。したがって $a = -8u = \frac{4\sqrt{35}}{5}$ で

あり、 $b = \frac{7}{2} - 8 \cdot \frac{7}{20} = \frac{7}{10}$ である。

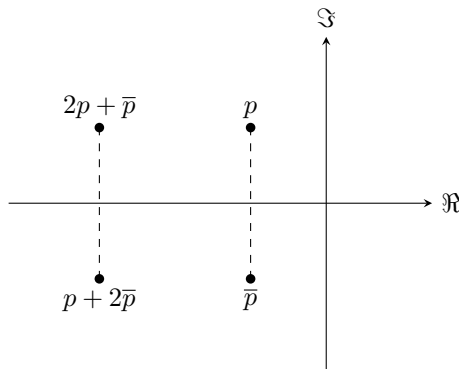
どちらの場合も $b > 0$ であり、さらに $v^2 = 7 - 19U$ はそれぞれ $\frac{9}{4}, \frac{7}{20}$ で正である。よって $v \neq 0$ であり、4 つの解は相異なる。したがって求める値は

$$(a, b) = \left(4, \frac{3}{2} \right), \quad \left(\frac{4\sqrt{35}}{5}, \frac{7}{10} \right)$$

である。

条件・検算

2 候補はいずれも $b > 0, v^2 > 0$ を満たす。さらに $u \neq 3u$ なので 4 根は相異なり、問題の仮定へ戻した必要十分性が確認できる。



【総評】 難度 7、計算量 7。複素数解の形を実部・虚部で整理し、係数比較を最後まで実行する問題である。目安は 25 分程度。4 解は $u \pm vi$ 、 $3u \pm vi$ になるため、実係数 2 次式 2 本の積にするのが自然である。途中で $u < 0$ と $v \neq 0$ を確認しておく、 $a > 0$ や相異なる解の条件を最後に落とさずに済む。計算は長い、 $U = u^2$ に置き換えると候補が 2 つにきれいに絞られる。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 3 問】

n を 2 以上の整数とする。中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて、そのうち 3 個が赤で残りが白とする。A 君と B 君が交互に 1 個ずつ玉を取り出して、先に赤の玉を取り出した方が勝ちとする。取り出した玉は袋には戻さないとする。A 君が先に取り始めるとき、B 君が勝つ確率を求めよ。

【方針】

赤玉が現れる 3 つの位置だけに注目する。全体では $1, 2, \dots, 2n$ から赤玉の位置を 3 つ選ぶ ${}_{2n}C_3$ 通りが等確率である。B 君が勝つのは最初の赤玉が偶数番目、つまり $2r$ 番目にあるときであり、その後ろから残り 2 個の赤玉の位置を選ぶ。和

$$\sum_{s=0}^{n-1} {}_{2s}C_2$$

を整理して確率にする。

【解答】

赤玉が出る 3 つの位置を、取り出し順 $1, 2, \dots, 2n$ の中から選ぶと考える。赤玉の位置の選び方は ${}_{2n}C_3$ 通りであり、すべて同様に確からしい。A 君は奇数番目、B 君は偶数番目に玉を取り出す。したがって B 君が勝つのは、最初に現れる赤玉の位置が偶数番目のときである。

最初の赤玉が $2r$ 番目にあるとする。このとき、残り 2 個の赤玉は $2r+1, 2r+2, \dots, 2n$ の中から選ばれるので、その選び方は ${}_{2n-2r}C_2$ 通りである。よって有利な場合の数は

$$\sum_{r=1}^n {}_{2n-2r}C_2$$

である。ここで $s = n - r$ とおくと

$$\sum_{r=1}^n {}_{2n-2r}C_2 = \sum_{s=0}^{n-1} {}_{2s}C_2$$

である。さらに ${}_{2s}C_2 = \frac{2s(2s-1)}{2} = s(2s-1)$ だから

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} {}_{2s}C_2 &= \sum_{s=0}^{n-1} (2s^2 - s) \\ &= 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(4n-5)}{6} \end{aligned}$$

である。

全体的場合の数は ${}_{2n}C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}$ である。したがって求める確率は

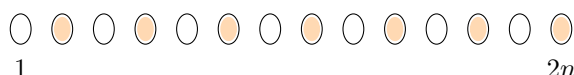
$$\frac{\frac{n(n-1)(4n-5)}{6}}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}} = \frac{4n-5}{4(2n-1)}$$

である。よって $\frac{4n-5}{4(2n-1)}$ である。

条件・検算

$n = 6$ を代入すると文系後期第 3 問の $\frac{19}{44}$ と一致する。これは一般式の独立した整合性確認になる。

最初の赤が偶数位置



【総評】 難度 5、計算量 4。文系後期第 3 問の一般化で、赤玉の位置だけを見る発想が中心である。目安は 15 分程度。
B 君が勝つ条件は最初の赤玉の位置だけで決まり、残り 2 個の赤玉の位置はその後ろから自由に選ぶ。和の添字変換後、 ${}_2sC_2 = s(2s-1)$ として整理すれば、最後の約分まで素直に進む。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 4 問】

a, b を $0 < b < a$ を満たす実数として、楕円 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。

- (1) $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ とする。座標が $(a \cos t, b \sin t)$ の C 上の点を $P(t)$ とおく。 $P(t)$ における C の法線 l の方程式と、 l と x 軸の交点 $Q(t)$ の座標を求めよ。
- (2) xyz 空間内の立体 V で底面が平面 $z = 0$ において

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 \leq x, \quad 0 \leq y$$

で与えられ、 z 軸の正の方向への高さが線分 $P(t)Q(t)$ 上の各点で t となるものを考える。ただし点 $(a, 0)$ と点 $\left(\frac{a^2 - b^2}{a}, 0\right)$ を結ぶ線分上の点での高さは 0 とする。 V の平面 $z = s$ による断面積を求めよ。

- (3) V の体積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

- (1) は楕円の接線の傾きを微分で求め、その垂直方向として法線を出す。 x 軸との交点 $Q(t)$ は $y = 0$ を代入して求める。
- (2) では、底面の各点を線分 $Q(t)P(t)$ 上の点として $0 \leq \lambda \leq 1$ で表す。 t を少し変えた方向と λ を少し変えた方向が作る小さな平行四辺形の面積を計算し、 $t \geq s$ の範囲で積分すると平面 $z = s$ の断面積が得られる。(3) は断面積を $s = 0$ から $\pi/2$ まで積分する。

【解答】

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を微分すると $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$ である。したがって $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ である。点 $P(t) = (a \cos t, b \sin t)$ における接線の傾きは $-\frac{b^2 a \cos t}{a^2 b \sin t} = -\frac{b \cos t}{a \sin t}$ である。よって法線の傾きは $\frac{a \sin t}{b \cos t}$ である。
したがって法線 l の方程式は $y - b \sin t = \frac{a \sin t}{b \cos t}(x - a \cos t)$ である。

次に l と x 軸の交点を求める。 $y = 0$ を代入すると $-b \sin t = \frac{a \sin t}{b \cos t}(x - a \cos t)$ である。 $0 < t \leq \pi/2$ で、 $t = \pi/2$ の場合も極限として同じ式になる。 $0 < t < \pi/2$ で整理すると $x - a \cos t = -\frac{b^2}{a} \cos t$ なので $x = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos t = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos t$ である。よって $Q(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos t, 0\right)$ である。

(2)

線分 $Q(t)P(t)$ 上の点を $X(t, \lambda) = Q(t) + \lambda(P(t) - Q(t))$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) と表す。すると $P(t) - Q(t) = \left(\frac{b^2}{a} \cos t, b \sin t\right)$ であるから、

$$X(t, \lambda) = \left(\frac{a^2 - b^2 + \lambda b^2}{a} \cos t, \lambda b \sin t\right)$$

である。 t を dt だけ、 λ を $d\lambda$ だけ変化させると、底面上に小さな平行四辺形ができる。その 2 辺の方向ベクトルは $\left(-\frac{a^2 - b^2 + \lambda b^2}{a} \sin t, \lambda b \cos t\right) dt$ と $\left(\frac{b^2}{a} \cos t, b \sin t\right) d\lambda$ である。したがってその面積は $\frac{b}{a}\{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2 \lambda\} dt d\lambda$ である。

高さが t である点の集まりは線分 $Q(t)P(t)$ である。よって平面 $z = s$ による断面は、高さが s 以上の底面部分、すなわち $s \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ に対応する。したがって断面積 $A(s)$ は

$$A(s) = \int_s^{\pi/2} \int_0^1 \frac{b}{a} \{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2 \lambda\} d\lambda dt$$

である。

まず λ で積分すると

$$A(s) = \frac{b}{a} \int_s^{\pi/2} \left\{ (a^2 - b^2) \sin^2 t + \frac{b^2}{2} \right\} dt$$

である。ここで

$$\int_s^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{1}{4} \sin 2s$$

であるから、

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{b}{a} \left[(a^2 - b^2) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{1}{4} \sin 2s \right\} + \frac{b^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - s \right) \right] \\ &= \frac{b}{2a} \left\{ a^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2s \right\} \end{aligned}$$

である。したがって

$$A(s) = \frac{b}{2a} \left\{ a^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2s \right\}$$

である。

(3)

体積は断面積を高さ方向に積分して

$$\int_0^{\pi/2} A(s) ds$$

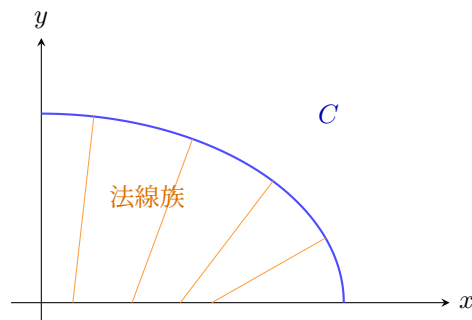
である。したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} \frac{b}{2a} \left\{ a^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2s \right\} ds \\ &= \frac{b}{2a} \left\{ a^2 \cdot \frac{\pi^2}{8} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cdot 1 \right\} \end{aligned}$$

である。よって $V = \frac{ab\pi^2}{16} + \frac{b(a^2 - b^2)}{4a}$ である。

条件・検算

断面積は $s = 0$ で底面積、 $s = \pi/2$ で 0 になることを確認する。体積は底面上の高さを直接積分する方法でも照合する。



▶ 解法 2 (高さを直接積分する別観点)

【方針】

(1)(2) の座標表示を使い、断面積をもう一度積分せず、底面の各微小面積にその高さ t を掛けて体積を直接計算する。

【解答】

(1)

法線と x 軸の交点は

$$l: y - b \sin t = \frac{a \sin t}{b \cos t} (x - a \cos t),$$

$$Q(t) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos t, 0 \right).$$

(2)

標準解法と同じ座標表示から断面積は

$$A(s) = \frac{b}{2a} \left\{ a^2 \left(\frac{\pi}{2} - s \right) + \frac{a^2 - b^2}{2} \sin 2s \right\}.$$

(3)

標準解法の座標

$$X(t, \lambda) = \left(\frac{a^2 - b^2 + \lambda b^2}{a} \cos t, \lambda b \sin t \right)$$

を用いる。対応する微小面積は

$$dA = \frac{b}{a} \{ (a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2 \lambda \} dt d\lambda$$

であり、その点の高さは t である。したがって体積を直接

$$V = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 t dA$$

$$= \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} t \left\{ (a^2 - b^2) \sin^2 t + \frac{b^2}{2} \right\} dt$$

と表せる。ここで

$$\int_0^{\pi/2} t \sin^2 t dt = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} t dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

よって

$$V = \frac{b}{a} \left\{ (a^2 - b^2) \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \right) + \frac{b^2 \pi^2}{16} \right\}$$

$$= \frac{ab\pi^2}{16} + \frac{b(a^2 - b^2)}{4a}.$$

この計算は、問題文で高さ 0 とされた x 軸上の線分が面積 0 であるため体積へ影響しないことも示している。

注意

標準解法の断面積を高さ方向に積分すると付加項が現れるように見える場合は、断面の対応範囲を再確認する必要がある。
底面上の高さを直接積分する上式が体積の独立検算になる。

【総評】 難度 8、計算量 8。法線で底面を分割し、断面積を積分する重い問題である。目安は 30 分以上。(1) の法線と $Q(t)$ は確実に取りたい。(2) では底面の点を (t, λ) で表す発想が核心で、面積倍率は小さな平行四辺形の面積として計算する。用語に頼らず、2 つの変化方向ベクトルを明示すれば採点上も追やすい。最後の体積は断面積の積分だけだが、 $\sin 2s$ の積分が 1 になる点まで丁寧に処理したい。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 5 問】

数列 $\{a_n\}$ を次で定める。

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{3n-1}{3n+5} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、一般項 a_n と級数の和

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

漸化式を順に掛けると、分子分母がずれて消える形になる。一般項は $a_n = 10/\{(3n-1)(3n+2)\}$ と予想でき、初項と漸化式で帰納的に確認する。級数は部分分数分解 $a_n = \frac{10}{3}(1/(3n-1) - 1/(3n+2))$ により隣り合う項が消えるので、部分分和を取ってから極限を計算する。

【解答】

漸化式は $a_{n+1} = \frac{3n-1}{3n+5} a_n$ である。初めの数項を見ると $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ であり、分母が 3 ずつずれていく形になっている。一般項として $a_n = \frac{10}{(3n-1)(3n+2)}$ を示す。

まず $n=1$ では $\frac{10}{(3 \cdot 1 - 1)(3 \cdot 1 + 2)} = \frac{10}{2 \cdot 5} = 1$ であり、 $a_1 = 1$ と一致する。次に $a_n = \frac{10}{(3n-1)(3n+2)}$ と仮定すると、漸化式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3n-1}{3n+5} \cdot \frac{10}{(3n-1)(3n+2)} \\ &= \frac{10}{(3n+2)(3n+5)} \end{aligned}$$

である。これは $\frac{10}{(3(n+1)-1)(3(n+1)+2)}$ に等しい。したがって数学的帰納法により $a_n = \frac{10}{(3n-1)(3n+2)}$ である。

次に級数の和を求める。部分分数分解すると

$$\frac{10}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

である。したがって第 N 部分和は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= \frac{10}{3} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \\ &= \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2} \right) \end{aligned}$$

である。 $N \rightarrow \infty$ とすると $S = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$ である。よって $S = \frac{5}{3}$ である。

条件・検算

一般項は初項と漸化式を満たす。部分分和では中間項が完全に相殺し、残項 $1/(3N+2)$ が 0 へ収束する。

$$\frac{10}{2 \cdot 5} \longrightarrow \frac{10}{5 \cdot 8} \longrightarrow \frac{10}{8 \cdot 11} \longrightarrow \cdots$$

隣り合う分母が望遠和で相殺

▶ 解法 2 (積の相殺を先に見る別解)

【方針】

漸化式を初項から積の形で展開し、分子と分母のずれを観察して一般項を得る。級数は部分分数分解で望遠和にする。

【解答】

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-4)}{8 \cdot 11 \cdot 14 \cdots (3n+2)}.$$

分子の $8, 11, \dots, 3n-4$ と分母の同じ因子が消えるので

$$a_n = \frac{2 \cdot 5}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{10}{(3n-1)(3n+2)}.$$

また

$$a_n = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right).$$

したがって

$$\sum_{n=1}^N a_n = \frac{10}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2} \right),$$

ゆえに

$$S = \frac{5}{3}.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。積の形で一般項を見抜き、部分分数分解で和を求める標準的な数列問題である。目安は 15 分程度。一般項は予想だけで終わらず、初項と漸化式で帰納的に確認することが必要である。級数では $3n+2 = 3(n+1) - 1$ となって次項の前半と打ち消し合うため、部分和を書いてから極限を取ると安全である。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。

【第 6 問】

m, n を互いに素な自然数, s, t を $|s-t| < 2\pi$ を満たす実数とする. 4 つの等式

$$\sin ms = \sin mt, \quad \cos ms = \cos mt$$

$$\sin ns = \sin nt, \quad \cos ns = \cos nt$$

が成り立つとすると $s = t$ であることを示せ.

▶ 解法 1

【方針】

正弦と余弦がともに等しいことは、角そのものが 2π の整数倍だけ違うことを意味する。したがって $m(s-t) = 2k\pi$ 、 $n(s-t) = 2l\pi$ と書ける。両式を比べると $kn = lm$ であり、 m, n が互いに素であることから $k = mq$ 、 $l = nq$ と表せる。これにより $s-t = 2q\pi$ となり、仮定 $|s-t| < 2\pi$ から $q = 0$ を導く。

【解答】

$\sin ms = \sin mt$, $\cos ms = \cos mt$ が成り立つ。正弦と余弦がともに等しい 2 つの角は、 2π の整数倍だけ異なる。したがって、ある整数 k が存在して $ms - mt = 2k\pi$ である。すなわち $m(s-t) = 2k\pi$ である。

同様に $\sin ns = \sin nt$, $\cos ns = \cos nt$ から、ある整数 l が存在して $n(s-t) = 2l\pi$ である。

上の 2 式から $s-t = \frac{2k\pi}{m} = \frac{2l\pi}{n}$ である。よって $kn = lm$ である。ここで m と n は互いに素であるから、 m は k を割り切り、 n は l を割り切る。したがって、ある整数 q を用いて $k = mq$, $l = nq$ と書ける。

これを $m(s-t) = 2k\pi$ に代入すると $m(s-t) = 2mq\pi$ である。 m は自然数なので $m \neq 0$ であり、両辺を m で割って $s-t = 2q\pi$ を得る。

ところが仮定より $|s-t| < 2\pi$ である。 $s-t$ が 2π の整数倍で、かつ絶対値が 2π より小さいためには $q = 0$ でなければならない。したがって $s-t = 0$ であり、 $s = t$ である。

条件・検算

正弦だけ、または余弦だけの一致では角の差を一意に定められない。両方の一致、互いに素、差の絶対値という 3 条件を順に使う。



▶ 解法 2 (ベズーの等式による別解)

【方針】

正弦・余弦の一致から $m(s-t)$ と $n(s-t)$ がともに 2π の整数倍であることを得る。互いに素な m, n にベズーの等式を用い、 $s-t$ 自体が 2π の整数倍であることを導く。

【解答】

正弦と余弦がともに等しいので、ある整数 k, l が存在して

$$m(s-t) = 2k\pi, \quad n(s-t) = 2l\pi$$

となる。 m, n は互いに素だから、ある整数 u, v が存在して

$$um + vn = 1$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} s-t &= (um + vn)(s-t) \\ &= u\{m(s-t)\} + v\{n(s-t)\} \\ &= 2(uk + vl)\pi. \end{aligned}$$

よって $s-t$ は 2π の整数倍である。一方

$$|s-t| < 2\pi$$

だから、その整数倍は 0 だけである。したがって

$$s = t.$$

この方法では $m \mid k, n \mid l$ を個別に示す必要がない。

【総評】 難度 5、計算量 3。三角関数の値の一致を角の合同条件に直し、互いに素という整数条件を使う証明問題である。目安は 12 分程度。正弦だけ、または余弦だけの一致では角が一意に決まらないが、両方が一致すれば 2π の整数倍の差に限られる。最後の $|s-t| < 2\pi$ は、 $s-t = 2q\pi$ から $q = 0$ を決めるために使う。

問題・解答の積分・総和・極限は原則として独立行に置き、分数は表示サイズで可読性を確保した。図は原問題の復元図または答案の論理関係を確認するための独自作図であり、解法の境界条件と結論を本文だけでも追えるようにした。