

東北大学 2006 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

定数 a, b, c, p, q を整数とし、次の x と y の 3 つの多項式

$$P = (x + a)^2 - 9c^2(y + b)^2$$

$$Q = (x + 11)^2 + 13(x + 11)y + 36y^2$$

$$R = x^2 + (p + 2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p - 14q)y - 77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 多項式 P, Q, R を因数分解せよ。

(2) P と Q, Q と R, R と P は、それぞれ x, y の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。

【方針】

まず 3 つの多項式をすべて 1 次式の積に分解する。共通因数を比較するときは、どの因数も先頭の係数を 1 にそろえて、 y の係数と定数項を比較する。 Q の因数は $x + 4y + 11, x + 9y + 11$ で固定されるので、 Q と R の共通因数から q を先に決める。次に、 P の因数の y 係数は $\pm 3c$ であることから、 P と Q の共通因数を絞り、残った因数を R と比較して a, b, c, p を決める。

【解答】

(1) P は平方の差であるから

$$\begin{aligned} P &= (x + a)^2 - \{3c(y + b)\}^2 \\ &= \{x + a - 3c(y + b)\}\{x + a + 3c(y + b)\} \end{aligned}$$

である。すなわち $P = \{x - 3cy + a - 3bc\}\{x + 3cy + a + 3bc\}$ である。

また、 Q は $4 + 9 = 13, 4 \cdot 9 = 36$ を用いて $Q = (x + 4y + 11)(x + 9y + 11)$ と分解できる。

最後に R は

$$\begin{aligned} &(x + py - 7)(x + 2qy + 11) \\ &= x^2 + (p + 2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p - 14q)y - 77 \end{aligned}$$

であるから $R = (x + py - 7)(x + 2qy + 11)$ である。

(2)

すべての 1 次因数は x の係数を 1 にして比較してよい。まず Q と R の共通因数を考える。 R の因数 $x + py - 7$ は定数項が -7 であり、 Q の 2 つの因数はいずれも定数項が 11 なので、これは Q の因数とは一致しない。

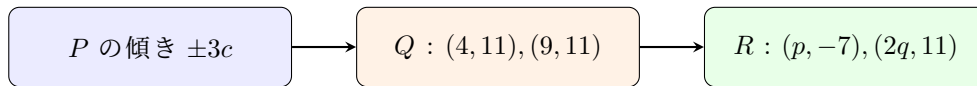
したがって共通因数は $x + 2qy + 11$ である。これが $x + 4y + 11$ または $x + 9y + 11$ と一致する。 q は整数なので $2q = 4$ だけが可能であり、 $q = 2$ である。このとき $R = (x + py - 7)(x + 4y + 11)$ となる。

次に P と Q の共通因数を考える。 P の因数の y 係数は $\pm 3c$ である。 Q の y 係数は 4 または 9 であり、 c は整数だから、 $\pm 3c = 4$ は不可能である。よって共通因数は $x + 9y + 11$ であり、 $3c = 9$ または $-3c = 9$ から $c = 3$ または $c = -3$ である。いずれの場合も、 P の 2 つの因数は $x + 9y + (a + 9b), x - 9y + (a - 9b)$ である。 P と Q の共通因数が $x + 9y + 11$ であることから $a + 9b = 11$ である。また P と R も共通因数をもつ。 R の因数 $x + 4y + 11$ は P の因数にならないので、 $x + py - 7$ が P の残りの因数 $x - 9y + (a - 9b)$ と一致する。したがって $p = -9, a - 9b = -7$ である。

連立して

$$\begin{cases} a + 9b = 11, \\ a - 9b = -7 \end{cases}$$

を解くと $a = 2, b = 1$ である。以上より $(a, b, c, p, q) = (2, 1, 3, -9, 2), (2, 1, -3, -9, 2)$ である。



定数項と y の係数を組にして照合すると、共通因数の対応が一意に決まる。

【総評】 難度 7, 計算量 7. 目安時間は 30 分。因数分解そのものより、共通因数を「係数を正規化して比較する」整理力が得点を分ける。 $x + py - 7$ は定数項だけで Q の因数から外せること、 $\pm 3c = 4$ が整数条件で不可能なことを明記したい。 $c = \pm 3$ の 2 通りを最後まで残す点も失点しやすい。検算では得た 5 整数を 3 つの因数分解へ戻し、各組が指定どおり別々の 1 次因数を共有することを確認する。

【第 2 問】

袋の中に 1 から 7 までの番号が書かれた球が 7 個入っている。ここから同時に 3 個の球を取り出す。取り出された 3 個の球に書かれている数を大きいものから順に X, Y, Z とする。 X, Y, Z それぞれの期待値を求めよ。ただし、7 個の球にはそれぞれ互いに異なる 1 個の番号が書かれていて、どの球も取り出される確率は皆等しいものとする。

▶ 解法 1

【方針】

3 個の番号を選ぶ全事象は同様に確からしい。最大値・最小値は、その値が k になるために残り 2 個をどの範囲から選ぶかで数えられる。中央値は直接数えてもよいが、3 個の和の期待値が 3 個分の平均に等しいことを使うと短く決まる。別解として、選んだ 3 数の間隔を対称に見る方法でも期待値を確認できる。

【解答】

全事象の数は ${}_7C_3 = 35$ である。

最大値 X が k であるためには、残り 2 個を $1, 2, \dots, k-1$ から選べばよい。したがって $k = 3, 4, 5, 6, 7$ について

$$P(X = k) = \frac{{}_{k-1}C_2}{35} \text{ である。よって}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{35} \sum_{k=3}^7 k \cdot {}_{k-1}C_2 \\ &= \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 15}{35} \\ &= \frac{210}{35} = 6 \end{aligned}$$

である。

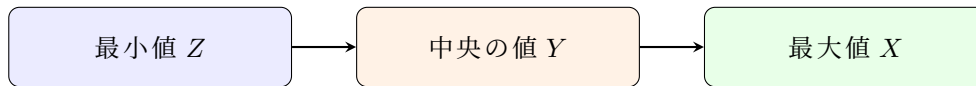
最小値 Z が k であるためには、残り 2 個を $k+1, k+2, \dots, 7$ から選べばよい。したがって $k = 1, 2, 3, 4, 5$ について

$$P(Z = k) = \frac{{}_{7-k}C_2}{35} \text{ であり、}$$

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{35} \sum_{k=1}^5 k \cdot {}_{7-k}C_2 \\ &= \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{35} \\ &= \frac{70}{35} = 2 \end{aligned}$$

である。

また、取り出された 3 個の番号の和の期待値は、1 個あたりの平均が $\frac{1+2+\dots+7}{7} = 4$ であることから $E(X + Y + Z) = 3 \cdot 4 = 12$ である。期待値の線形性より $E(Y) = 12 - E(X) - E(Z) = 12 - 6 - 2 = 4$ となる。以上より $E(X) = 6, \quad E(Y) = 4, \quad E(Z) = 2$ である。



$1, \dots, 7$ の反転対称性から、期待値は中心 4 のまわりに 2, 4, 6 と並ぶ。

▶ 解法 2 (隙間の対称性)

【方針】

選んだ 3 数を小さい順に並べ、選ばれなかった 4 数が両端と選択数の間に何個ずつ入るかを考える。4 つの隙間是对称なので期待値が等しい。

【解答】

選んだ 3 数を小さい順に $U < V < W$ とする。選ばれなかった番号の個数を

$$G_0 = U - 1, \quad G_1 = V - U - 1, \quad G_2 = W - V - 1, \quad G_3 = 7 - W$$

とおく。常に

$$G_0 + G_1 + G_2 + G_3 = 4$$

である。

3 個の選び方と、4 つの非負整数 G_0, G_1, G_2, G_3 で和が 4 となる組は一対一に対応する。さらに 4 つの隙間を入れ替える写像で選び方全体が互に対応するため、各 G_i の分布は同じである。期待値の線形性から

$$4E(G_0) = E(G_0 + G_1 + G_2 + G_3) = 4$$

となり、

$$E(G_0) = E(G_1) = E(G_2) = E(G_3) = 1$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} E(U) &= 1 + E(G_0) = 2, \\ E(V) &= 2 + E(G_0) + E(G_1) = 4, \\ E(W) &= 3 + E(G_0) + E(G_1) + E(G_2) = 6. \end{aligned}$$

$X = W, Y = V, Z = U$ なので

$$E(X) = 6, \quad E(Y) = 4, \quad E(Z) = 2$$

を得る。

【総評】 難度 4, 計算量 3。目安時間は 12 分。最大値・最小値を「その値で確定するための残りの選び方」で数えるのが標準的で、中央値は和の期待値で処理すると無駄がない。 ${}_7C_3$ を分母にすること、最大値と最小値で選べる範囲を逆にしないことが採点上の要点である。最大・中央・最小の期待値の和が 12 になることが、分布計算の独立な検算になる。

【第 3 問】

図 1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える. この四角形 $ABCD$ を AC で折り, 図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く. 図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α , $\alpha = \angle BCD$, とし $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする.

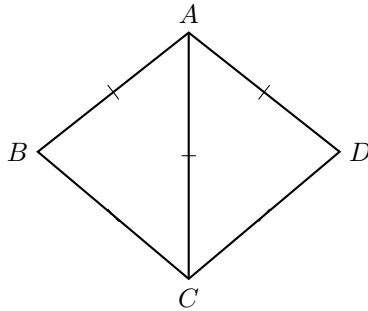


図 1：折る前の四角形

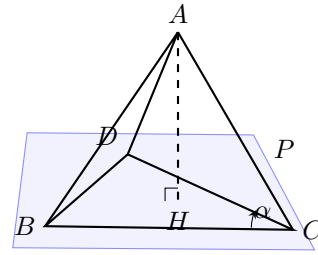


図 2：折った後

以下の問に答えよ.

- (1) 図 2 において, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ と α で表せ.
- (2) $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ.
- (3) H が図 2 における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 α を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

C を基準にして $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ が張る平面を平面 P と見る. H は A の正射影なので, $\overrightarrow{CH}$ を $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ の一次結合で置き, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH}$ が平面 P 内の 2 方向と垂直になる条件を立てる. $AB = AD = AC = 1$ から内積 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = 1/2$ を先に出すのが決め手である.

【解答】

(1)

記号を簡単にするため

$$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{w}, \quad \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{u}, \quad \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{v}$$

とおく. 条件より

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1, \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos \alpha$$

である. また $AB = 1$ だから $|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}|^2 = 1$ であり, 展開して $1 + 1 - 2\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} = 1$ となる. よって $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}$ である. 同様に $AD = 1$ から $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}$ である. H は平面 P 上の点なので $\overrightarrow{CH} = \lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}$ とおける. また $AH \perp P$ だから

$$(\boldsymbol{w} - \overrightarrow{CH}) \cdot \boldsymbol{u} = 0, \quad (\boldsymbol{w} - \overrightarrow{CH}) \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

である. したがって

$$\begin{cases} \lambda + \mu \cos \alpha = \frac{1}{2}, \\ \lambda \cos \alpha + \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

を得る. 2 式を引くと $(1 - \cos \alpha)(\lambda - \mu) = 0$ である. $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ より $\cos \alpha \neq 1$ なので $\lambda = \mu$ である. これを代入して $\lambda(1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2}$ となるから $\lambda = \mu = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$ である. よって

$$\overrightarrow{CH} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{2(1 + \cos \alpha)}$$

であり,

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{2(1 + \cos \alpha)}$$

(2) $AH \perp P$ で、 C, H は平面 P 上にあるから、三角形 ACH は H で直角である。したがって $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 1 - CH^2$ である。

(1) の結果から

$$\begin{aligned} CH^2 &= \left| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2(1 + \cos \alpha)} \right|^2 \\ &= \frac{|\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2}{4(1 + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{2 + 2\cos \alpha}{4(1 + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} \end{aligned}$$

である。よって $AH^2 = 1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + 2\cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}$ である。 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ なので $1 + 2\cos \alpha > 0$ であり、

$$AH = \sqrt{\frac{1 + 2\cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}} \text{ となる。}$$

(3) H が $\triangle BCD$ の重心であるとき、 C を基準にすれば $\overrightarrow{CH} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{3}$ である。一方、(1) より

$$\overrightarrow{CH} = \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{2(1 + \cos \alpha)}$$

である。 $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ だから係数を比較して $\frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{3}$ を得る。これより $2(1 + \cos \alpha) = 3$, $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ である。範囲 $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ において $\alpha = 60^\circ$ である。

$$\boxed{\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 1/2} \longrightarrow \boxed{\overrightarrow{CH} = \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v})} \longrightarrow \boxed{\lambda = 1/3 \implies \alpha = 60^\circ}$$

正射影の条件を 2 本の内積に直すと、対称性から係数が等しくなる。

▶ 解法 2 (座標を置く方法)

【方針】

平面 P を $z = 0$ とし、 C を原点、 B を x 軸上に置く。 $AB = AD = AC = 1$ を内積条件へ直して A と射影 H の座標を求め、重心条件を座標比較する。

【解答】

(1)

平面 P を $z = 0$ とし、

$$C = (0, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0), \quad D = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$$

とおく。 $A = (X, Y, Z)$ とする。 $AC = AB = 1$ より

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad (X - 1)^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

であるから $X = 1/2$ である。同様に $AC = AD = 1$ より

$$X \cos \alpha + Y \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$Y = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

となる。

H は A の $z = 0$ への正射影だから

$$H = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2}, 0 \right).$$

よって $\overrightarrow{AH} = (0, 0, -Z)$ であり、元のベクトルへ戻せば

$$\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}}{2(1 + \cos \alpha)}$$

を得る。

(2)

また

$$\begin{aligned} AH^2 = Z^2 &= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tan^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} \end{aligned}$$

なので、長さは解法 1 と同じになる。

(3)

H が三角形 BCD の重心なら、その x 座標は

$$\frac{0 + 1 + \cos \alpha}{3}$$

である。一方 H の x 座標は $1/2$ だから

$$\frac{1 + \cos \alpha}{3} = \frac{1}{2}.$$

したがって $\cos \alpha = 1/2$ であり、指定範囲から

$$\alpha = 60^\circ$$

である。このとき y 座標もともに $\sqrt{3}/6$ となり、重心条件を満たす。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 目安時間は 30 分。空間図形に見えるが、実質は平面への正射影を内積で処理する問題である。 $AB = AD = AC = 1$ から 2 つの内積が $1/2$ になることを最初に示すと、後は 2 元連立に落ちる。 $AH^2 = AC^2 - CH^2$ を使う場面で直角三角形を明記すると、計算の意味が伝わりやすい。向きのあるベクトル $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA}$ の符号と、平方根が実数になる角度範囲を確認する。

【第 4 問】

連立不等式 $1 \leq x \leq 2, y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また、 a を定数とし、不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問に答えよ。

- (1) D と E とが共通点をもつような実数 a の範囲を求めよ。
- (2) (1) の範囲の a に対して、 D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。

【方針】

共通部分があるには、 $1 \leq x \leq 2$ のどこかで放物線 $y = (x - a)(x - 2a)$ が x 軸以下に来ればよい。したがって根の区間 $[a, 2a]$ と $[1, 2]$ の重なりを調べる。面積は、重なった x 区間で上端が $y = 0$ 、下端が放物線になる部分を積分する。 $a = 1$ を境に積分区間が変わるので、最後の最大値も 2 区間に分けて微分する。

【解答】

(1)

領域 D は $1 \leq x \leq 2, y \leq 0$ であり、領域 E は $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ である。したがって共通点をもつためには、ある x が $1 \leq x \leq 2$ を満たし、かつ $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$ となることが必要十分である。

左辺は $x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a)$ である。これが 0 以下になる x が存在するには、まず $a > 0$ であり、区間 $[a, 2a]$ が $[1, 2]$ と交わればよい。交わりの条件は $2a \geq 1, a \leq 2$ であるから $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ である。

(2)

共通部分では $0 \geq y \geq (x - a)(x - 2a)$ である。よって面積は次の定積分で求められる。

$$\int \{0 - (x - a)(x - 2a)\} dx$$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき, $[a, 2a]$ と $[1, 2]$ の共通部分は $[1, 2a]$ である。したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{2a} \{-(x-a)(x-2a)\} dx \\ &= \int_1^{2a} (-x^2 + 3ax - 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_1^{2a} \\ &= -\frac{(a-2)(2a-1)^2}{6} \end{aligned}$$

である。 $1 \leq a \leq 2$ のとき, $[a, 2a]$ と $[1, 2]$ の共通部分は $[a, 2]$ である。したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^2 \{-(x-a)(x-2a)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_a^2 \\ &= \frac{(a-2)^2(5a-4)}{6} \end{aligned}$$

である。

よって

$$S(a) = \begin{cases} -\frac{(a-2)(2a-1)^2}{6} & \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1\right), \\ \frac{(a-2)^2(5a-4)}{6} & (1 \leq a \leq 2) \end{cases}$$

である。

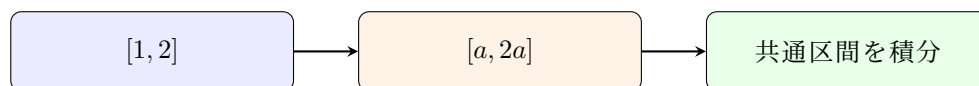
(3)

まず $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ で $S(a) = -\frac{(a-2)(2a-1)^2}{6}$ を微分すると $S'(a) = \frac{(2a-1)(3-2a)}{2}$ である。この区間では $S'(a) \geq 0$ なので, 最大は $a=1$ で $S(1) = \frac{1}{6}$ である。

次に $1 \leq a \leq 2$ で $S(a) = \frac{(a-2)^2(5a-4)}{6}$ を微分すると $S'(a) = \frac{(a-2)(5a-6)}{2}$ である。したがって $1 < a < 2$ の内部の極値は $a = \frac{6}{5}$ であり, $1 \leq a \leq \frac{6}{5}$ で増加, $\frac{6}{5} \leq a \leq 2$ で減少する。よってこの区間の最大値は

$$S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot 2}{6} = \frac{16}{75}$$

である。 $\frac{16}{75} > \frac{1}{6}$ だから, 全体での最大値は $\frac{16}{75}$ である。



放物線が x 軸以下になる区間と帯 $1 \leq x \leq 2$ の重なりが積分区間である。

【総評】 難度 7, 計算量 7. 目安時間は 28 分。放物線の根 $a, 2a$ と固定区間 $[1, 2]$ の重なりで全体が決まる。 a が正であること, $a=1$ を境に積分区間が $[1, 2a]$ から $[a, 2]$ に変わることを明示したい。最大値では端点 $a=1/2, 1, 2$ と内部点 $a=6/5$ を比較するのが採点上重要である。2 つの式は $a=1$ でともに $1/6$ となるため, 場合分けの接続も連続性で検算できる。