

東北大学 2006 年度 文系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

多項式 $F(x)$ を零でない多項式 $G(x)$ で割った余りを $R(x)$ とする．以下の間に答えよ．

- (1) 方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通解は方程式 $R(x) = 0$ の解であることを示せ．
- (2) a は実数の定数として

$$G(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + 2(a-2)x + 4a$$

$$R(x) = x^3 + x^2 - (a^2 + 3a + 6)x + 2a(a+3)$$

とする． $G(x)$ を $R(x)$ で割った余り $S(x)$ を求めよ．さらに，方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通の実数解を求めよ．

【方針】

(1) は除法の等式 $F = QG + R$ に共通解を代入するだけでよい．(2) ではまず G を R で割った余り S を実際に求める． F と G の共通解は G と R の共通解なので，さらに R と S の共通実数解に絞る． S の候補 $x = a, 2$ が本当に $R = 0$ を満たすことまで確認する．

【解答】

(1) $F(x)$ を $G(x)$ で割った商を $Q(x)$ とすると，余りが $R(x)$ であるから $F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$ と書ける． α が方程式 $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通解であるとする．このとき $F(\alpha) = 0$ ， $G(\alpha) = 0$ である．上の等式に $x = \alpha$ を代入すると $0 = F(\alpha) = Q(\alpha)G(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$ となる．したがって α は $R(x) = 0$ の解である．

(2)

実際に $G(x)$ を $R(x)$ で割ると，商は $x - a - 1$ であり，余り $S(x)$ は

$$S(x) = (a^2 + 4a + 5)x^2 - (a^3 + 6a^2 + 13a + 10)x + 2a^3 + 8a^2 + 10a$$

である．これは $S(x) = (x - a)(x - 2)(a^2 + 4a + 5)$ と因数分解できる．

ここで $a^2 + 4a + 5 = (a + 2)^2 + 1 > 0$ である．したがって $G(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通実数解は， $S(x) = 0$ も満たすので，候補は $x = a$ ， $x = 2$ に限られる．

実際に

$$R(a) = a^3 + a^2 - (a^2 + 3a + 6)a + 2a(a + 3) = 0$$

であり，また

$$R(2) = 8 + 4 - 2(a^2 + 3a + 6) + 2a(a + 3) = 0$$

である．よって $x = a$ と $x = 2$ はともに $R(x) = 0$ を満たす．また $S(x) = 0$ であるから，除法の等式 $G(x) = (x - a - 1)R(x) + S(x)$ より $G(x) = 0$ も満たす．

(1) と， $F = QG + R$ の関係から， $F(x) = 0$ と $G(x) = 0$ の共通の実数解は $G(x) = 0$ と $R(x) = 0$ の共通実数解に一致する．したがって $x = a$ ， $x = 2$ である．ただし $a = 2$ の場合は，これは同じ解 $x = 2$ を表す．

$$F = QG + R \longrightarrow G = (x - a - 1)R + S \longrightarrow S = (a^2 + 4a + 5)(x - a)(x - 2)$$

多項式の互除法と同じ流れで，共通零点の候補を次数の低い余りへ落とす．

【総評】 難度 6，計算量 5．目安時間は 25 分．多項式の割り算を 2 回使うユークリッド法型の問題である． $S(x) = 0$ の候補を出しただけでは不十分で，候補 $x = a, 2$ が $R(x) = 0$ を満たすことを代入で確認する必要がある． $a = 2$ のとき重複して 1 つの解になる点も，結論の書き方で注意したい．候補 $x = a, 2$ は余り S の零点であるだけでなく， $R = 0$ も直接確認して十分性を確定する．

【第 2 問】

6^n が 39 桁 (けた) の自然数になるときの自然数 n を求めよ. その場合の n に対する 6^n の最高位の数字を求めよ.
ただし

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \quad \log_{10} 3 = 0.4771$$

とする.

【方針】

桁数は常用対数で判定する。 6^n が 39 桁である条件は $38 \leq n \log_{10} 6 < 39$ であり, $\log_{10} 6 = 0.7781$ を使って自然数 n を絞る。最高位の数字は, $n \log_{10} 6$ の小数部分 r について 10^r がどの整数区間 $[d, d+1)$ に入るかで決まる。

【解答】

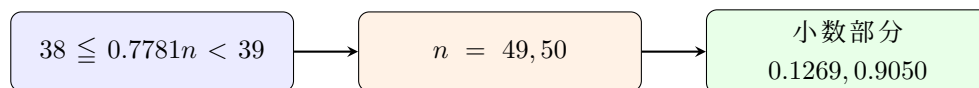
与えられた値から $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$ である。

自然数 N が 39 桁であることは $10^{38} \leq N < 10^{39}$ と同値である。したがって 6^n が 39 桁である条件は $10^{38} \leq 6^n < 10^{39}$ であり, 常用対数をとると $38 \leq n \log_{10} 6 < 39$ となる。よって $38 \leq 0.7781n < 39$ である。

これを計算すると $\frac{38}{0.7781} \leq n < \frac{39}{0.7781}$ であり, 実際に $0.7781 \cdot 48 = 37.3488 < 38$, $0.7781 \cdot 49 = 38.1269$, $0.7781 \cdot 50 = 38.9050$, $0.7781 \cdot 51 = 39.6831 > 39$ である。したがって $n = 49, 50$ である。

次に最高位の数字を求める。 $n = 49$ のとき $\log_{10} 6^{49} = 38.1269$ であるから $6^{49} = 10^{38} \cdot 10^{0.1269}$ である。ここで $0 < 0.1269 < \log_{10} 2 = 0.3010$ なので $1 < 10^{0.1269} < 2$ である。したがって最高位の数字は 1 である。 $n = 50$ のとき $\log_{10} 6^{50} = 38.9050$ である。ここで $\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030$ であり, $\log_{10} 9 = 2 \log_{10} 3 = 0.9542$ である。したがって $\log_{10} 8 < 0.9050 < \log_{10} 9$ だから $8 < 10^{0.9050} < 9$ である。よって最高位の数字は 8 である。

以上より $n = 49$ のとき最高位は 1, $n = 50$ のとき最高位は 8 である。



桁数は対数の整数部分、最高位は小数部分を $\log 2, \log 8, \log 9$ と比較して決める。

【総評】 難度 4, 計算量 3。目安時間は 12 分。39 桁条件を $38 \leq \log_{10} 6^n < 39$ と書ければ大きく迷わない。最高位は近似値を直接 10 の冪に戻すのではなく, $\log_{10} 2, \log_{10} 8, \log_{10} 9$ と比較すると安全である。端の不等号を逆にしないことが重要である。与えられた 4 桁の対数値に基づく判定なので, 境界比較は丸め誤差に接近していないことも確認する。

【第 3 問】

(a, b) は xy 平面上の点とする。点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - x$ に接線がちょうど 2 本だけひけ, この 2 本の接線が直交するものとする。このときの (a, b) を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

曲線上の接点の x 座標を t として接線を作り, その接線が点 (a, b) を通る条件を t の 3 次方程式にする。接線がちょうど 2 本だけ引けることは, この 3 次方程式が重解 r と別の単解 s をもつことに対応する。係数比較で $r(2s+r) = 0$ を得て場合分けし, 最後に 2 本の接線の傾きの積が -1 になる条件を課す。

【解答】

曲線 $y = x^3 - x$ の $x = t$ における傾きは $3t^2 - 1$ である。接点は $(t, t^3 - t)$ なので, 接線の方程式は $y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$ である。整理すると $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ となる。

この接線が点 (a, b) を通る条件は $b = (3t^2 - 1)a - 2t^3$ であり, 移項して $2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$ を得る。したがって, 点 (a, b) から引ける接線の本数は, この t の 3 次方程式の相異なる実数解の個数で決まる。

接線がちょうど 2 本だけ引けるためには, この 3 次方程式が重解 r と, それとは異なる単解 s をもつ必要がある。そこで $2t^3 - 3at^2 + a + b = 2(t-r)^2(t-s)$ とおく。右辺を展開すると $2(t-r)^2(t-s) = 2t^3 - 2(s+2r)t^2 + 2r(2s+r)t - 2r^2s$ である。係数を比較して, t の係数から $2r(2s+r) = 0$ すなわち $r = 0$ または $2s+r = 0$ である。

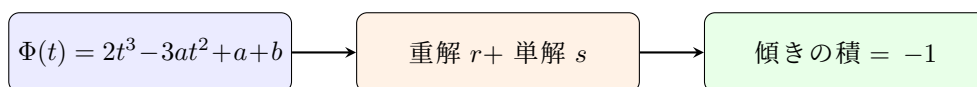
まず $r = 0$ の場合を考える。係数比較より $3a = 2s$, $a + b = 0$ であるから $a = \frac{2s}{3}$, $b = -a$ である。2 本の接線の接点は $t = 0$ と $t = s$ であり、傾きはそれぞれ -1 , $3s^2 - 1$ である。これらが直交する条件は、傾きの積が -1 であることなので $(-1)(3s^2 - 1) = -1$ である。よって $3s^2 - 1 = 1$, $s^2 = \frac{2}{3}$ となる。したがって $s = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ であり、 $a = \frac{2s}{3} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}$, $b = -a$ である。

次に $2s + r = 0$ の場合を考える。このとき $s = -r/2$ であり、係数比較から $a = r$, $b = r^3 - r$ となる。2 本の接線の傾きは $3r^2 - 1$, $3\left(-\frac{r}{2}\right)^2 - 1 = \frac{3r^2}{4} - 1$ である。直交条件は $(3r^2 - 1)\left(\frac{3r^2}{4} - 1\right) = -1$ である。 $u = r^2$ とおくと $(3u - 1)\left(\frac{3u}{4} - 1\right) = -1$ であり、整理して $9u^2 - 15u + 8 = 0$ となる。この判別式は $(-15)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 8 = 225 - 288 = -63 < 0$ なので、実数 u は存在しない。したがってこの場合は不適である。

以上より求める点は

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{9}, -\frac{2\sqrt{6}}{9}\right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$$

である。



接線の本数を接点の方程式の相異なる実根数へ翻訳し、最後に直交条件を課す。

▶ 解法 2 (導関数で重解を特定する方法)

【方針】

接点を決める 3 次式が相異なる 2 実根をもつためには重解が必要である。3 次式とその導関数の共通根を先に求め、候補を 2 場合に絞って直交条件を課す。

【解答】

接点の x 座標を t とすると、点 (a, b) を通る接線の条件は

$$\Phi(t) = 2t^3 - 3at^2 + a + b = 0$$

である。接線がちょうど 2 本なら、 Φ は重解 r と、それと異なる単解をもつ。重解は $\Phi'(r) = 0$ も満たすが

$$\Phi'(t) = 6t(t - a)$$

なので

$$r = 0 \quad \text{または} \quad r = a$$

である。

重解が $r = 0$ の場合

$\Phi(0) = 0$ より $a + b = 0$ である。また

$$\Phi(t) = t^2(2t - 3a)$$

なので、もう一つの接点は $s = 3a/2$ である。2 本の接線の傾きは

$$-1, \quad 3s^2 - 1$$

だから、直交条件より

$$(-1)(3s^2 - 1) = -1.$$

よって $s^2 = 2/3$, $a = 2s/3$, $b = -a$ である。

重解が $r = a$ の場合

$\Phi(a) = 0$ より $b = a^3 - a$ である。根の和から、他の根は $s = -a/2$ となる。2 接線の傾きの積を -1 とすると

$$(3a^2 - 1)\left(\frac{3a^2}{4} - 1\right) = -1.$$

$u = a^2$ とおけば

$$9u^2 - 15u + 8 = 0$$

となるが、判別式は -63 で実数解をもたない。

したがって第 1 の場合だけが残る、

$$(a, b) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{9}, -\frac{2\sqrt{6}}{9} \right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{2\sqrt{6}}{9} \right)$$

である。各場合で $s \neq 0$ なので接点は相異なり、接線は確かに 2 本である。

【総評】 難度 7, 計算量 7. 目安時間は 32 分。接線の本数を接点パラメータ t の方程式の実根数に翻訳するところが核心である。「ちょうど 2 本」は重解を含む 3 次方程式として扱う必要があり、単に判別式だけで済ませると直交条件を組み込みにくい。重解 r と単解 s の係数比較を丁寧に書けば、最後は傾きの積の確認に集中できる。重解が三重解になる場合や 2 本が同一直線になる場合を除き、相異なる接点が本当に 2 個あることを最後に確認する。

【第 4 問】

1 個のサイコロを振り、出た目が 1 から 5 ならば出た目の数を総得点に加算し、出た目が 6 ならば総得点を 0 にするというゲームを考える。ゲーム開始時の総得点は 0 とする。たとえば、3 回サイコロを振ったときに目が出た順に 1, 2, 3 ならば総得点は 6, 出た目が順に 4, 6, 5 ならば総得点は 5 である。以下の問に答えよ。

- (1) ゲーム開始時サイコロを 2 回振った後の総得点の期待値を求めよ。
- (2) ゲームを開始してサイコロを 3 回振った後の総得点が 7 以上となる確率を求めよ。
- (3) 現在の総得点が S のとき、次に 1 回サイコロを振った後の総得点の期待値が S 以下となるための S についての条件を求めよ。

【方針】

現在の総得点が S のとき、次の 1 回後の得点の期待値をまず式にする。(1) はこの期待値の更新を 2 回使えばよい。(2) は 3 回の出目を数え上げるが、最後に目が出た 6 がそれ以前を消すので、「6 が出ない場合」と「1 回目だけが 6 の場合」に分けると漏れにくい。(3) は (1) で作った 1 回後の期待値を S 以下にする不等式で決まる。

【解答】

(1)

現在の総得点が S であるとする。次に 1 回サイコロを振った後の総得点は、出目が 1 から 5 ならそれぞれ $S+1, S+2, S+3, S+4, S+5$ であり、出目が 6 なら 0 である。したがって次の 1 回後の期待値は $\frac{(S+1) + (S+2) + (S+3) + (S+4) + (S+5) + 0}{6} = \frac{5S+15}{6}$ である。

開始時は $S=0$ なので、1 回後の期待値は $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ である。さらに 2 回後の期待値は、上の式の S に 1 回後の期待値を入

れて $\frac{5 \cdot \frac{5}{2} + 15}{6} = \frac{\frac{25}{2} + 15}{6} = \frac{55}{12}$ である。よって $\frac{55}{12}$ である。

(2)

3 回の出目は全部で $6^3 = 216$ 通りである。

まず、3 回とも 6 が出ない場合を数える。このとき出目はすべて 1, 2, 3, 4, 5 であり、最終得点は 3 つの出目の和である。全体は $5^3 = 125$ 通りである。和が 6 以下になる通り数は、和が 3, 4, 5, 6 の場合を数えて $1+3+6+10=20$ 通りである。したがって和が 7 以上になるものは $125-20=105$ 通りである。

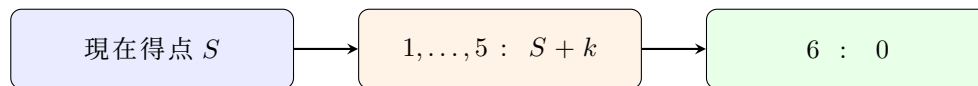
次に、6 が出る場合を考える。2 回目または 3 回目に 6 が出ると、その時点で総得点が 0 になり、その後残る加算は高々 5 なので、3 回後の総得点は 7 以上にならない。したがって可能性があるのは 1 回目だけが 6 の場合である。このとき 2 回目と 3 回目の出目の和が 7 以上であればよい。1 から 5 までの 2 数の並びは 25 通りで、和が 6 以下のものは $1+2+3+4+5=15$ 通りである。よって和が 7 以上のものは $25-15=10$ 通りである。

したがって有利な出目の並びは $105+10=115$ 通りであり、求める確率は $\frac{115}{216}$ である。

(3)

(1) で求めたように、現在の総得点が S のとき、次に 1 回振った後の総得点の期待値は $\frac{5S+15}{6}$ である。これが S 以下と

なる条件は $\frac{5S+15}{6} \leq S$ である。整理すると $5S+15 \leq 6S$ なので $S \geq 15$ である。



1 回の更新は $E_{\text{next}} = (5S+15)/6$ 。期待値と確率の数え上げの双方の基礎になる。

【総評】 難度 4, 計算量 4。目安時間は 16 分。リセットがあるため, 単純な和の問題として扱えるのは 6 が最後に出ていない場合だけである。(2) では「1 回目だけ 6」は残り 2 回の和で判定できるが, 2 回目以降に 6 が出る場合は 7 以上にならない。この切り分けを明確にすると数え上げの重複を防げる。3 回目に 6 が出れば得点は 0、2 回目に 6 が出れば残り 1 回の最大は 5 なので、7 以上の事象から除外できる。