

東北大学 2009 年度 文系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$P(x)$ を x についての 3 次式で、 x^3 の項の係数が 1 であるものとする。 $a < b$ および $c < d$ を満たす実数 a, b, c, d に対して、 $P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りが、それぞれ、 $P(x)$ を $(x-c)(x-d)$ で割った商と余りに一致するための必要十分条件は、 $a = c, b = d$ であることを示せ。

【方針】

2 つの割り算で商と余りがともに一致すると仮定し、割り算の表示を並べる。3 次式をモニックな 2 次式で割った商は 1 次式で、しかも零式ではない。したがって同じ商・同じ余りを消去すると、割る 2 次式そのものが一致する。最後に 2 次式の係数を比較し、 $a < b, c < d$ という順序条件で対応を確定する。

【解答】

$P(x)$ を $(x-a)(x-b)$ で割った商と余りをそれぞれ $Q(x), R(x)$ とする。同じ商と余りが $(x-c)(x-d)$ で割ったときにも得られると仮定する。このとき $P(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + R(x)$ であり、同時に $P(x) = Q(x)(x-c)(x-d) + R(x)$ である。両式を引くと $Q(x)\{(x-a)(x-b) - (x-c)(x-d)\} = 0$ である。

$P(x)$ は x^3 の項の係数が 1 である 3 次式であり、割る式はいずれも x^2 の項の係数が 1 である 2 次式である。したがって商 $Q(x)$ は x の項の係数が 1 である 1 次式であり、零式ではない。よって $(x-a)(x-b) = (x-c)(x-d)$ でなければならない。

2 次式を展開して係数を比較すると $a + b = c + d, ab = cd$ である。これは、2 つの 2 次方程式 $(X-a)(X-b) = 0, (X-c)(X-d) = 0$ が同じ解の組をもつことを意味する。したがって集合として $\{a, b\} = \{c, d\}$ である。さらに $a < b, c < d$ なので、小さい方どうし、大きい方どうしが一致し、 $a = c, b = d$ となる。

逆に $a = c, b = d$ なら、割る 2 次式が同じであるから、商と余りが一致するのは明らかである。したがって必要十分条件は $a = c, b = d$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5。割り算の一意性を式で表し、同じ商・同じ余りを消去して割る 2 次式の一致に持ち込む問題である。商 $Q(x)$ が零式でないことを、 P がモニックな 3 次式であることから明記すると論理が締まる。最後は係数比較だけでなく、 $a < b, c < d$ により対応を決める。目安時間は 15 分前後。

原問題の脱字を補ったうえで、必要性だけでなく $a = c, b = d$ なら同じ除式なので商・余りが一致するという十分性まで書く。商 Q が零式でない根拠は、被除式と除式がともにモニックで次数が 3 と 2 だからである。

【第 2 問】

アメ玉の入った缶がある。白のアメ玉が 11 個、赤黄緑青の 4 色のアメ玉がそれぞれ 1 個ずつ、合計 15 個入っている。缶の中身をよく混ぜてから 3 個同時に取り出す。取り出した 3 個について以下の確率と期待値を求めよ。

- (1) 3 個とも白のアメ玉である確率。
- (2) 緑のアメ玉が含まれる確率。
- (3) 緑と青のアメ玉の個数の合計の期待値。
- (4) 白以外のアメ玉の個数の期待値。

【方針】

3 個を同時に取り出すので、全事象は ${}_{15}C_3$ 通りで数える。特定色のアメ玉は 1 個だけなので、「含まれる」確率はその 1 個を固定して残りを選ぶ。期待値は、緑や青など各色のアメ玉が取り出されたかどうかを 0,1 で表す変数の和として考え、期待値の加法性を使う。

【解答】

(1)

15 個の中から 3 個を同時に取り出すので、全体は ${}_{15}C_3$ 通りである。3 個とも白であるためには、11 個の白から 3 個を選ばばよい。したがって確率は

$$\frac{{}_{11}C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{165}{455} = \frac{33}{91}$$

である。

(2)

緑のアメ玉は 1 個だけである。緑が含まれるためには、緑の 1 個を必ず選び、残り 2 個を他の 14 個から選べばよい。よって確率は

$$\frac{{}_{14}C_2}{{}_{15}C_3} = \frac{91}{455} = \frac{1}{5}$$

である。

(3)

緑のアメ玉が取り出されたとき 1、そうでないとき 0 をとる変数を X_G 、青について同様に X_B とする。求める個数は $X_G + X_B$ である。特定の 1 個のアメ玉が取り出される確率は $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ なので $E(X_G) = E(X_B) = \frac{1}{5}$ である。期待値の加法性より $E(X_G + X_B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ である。

(4)

白以外のアメ玉は赤、黄、緑、青の 4 個である。それぞれについて、取り出される確率は $3/15 = 1/5$ である。白以外の個数を、これら 4 個が取り出されたかどうかの和として表せば、期待値は $4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ である。

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 10 分程度で、全事象を ${}_{15}C_3$ にそろえ、順序を数えないことが第一の採点ポイントである。緑・青・赤・黄はいずれも 1 個だけなので、(2) では「緑を固定して残り 2 個」、期待値では「その 1 個が選ばれたか」を 0,1 で見ると短く処理できる。白以外の個数について分布を全部作っても解けるが、和の期待値に分ける方がミスが少ない。典型的な誤りは、同時に取り出すのに順列で数えること、(3) で緑と青が同時に入る場合を余分に補正しようとする、(4) で白以外 4 個の対称性を見落として場合分けを増やすことである。

確率の分母は ${}_{15}C_3$ に統一できる。期待値では独立性は不要で、特定の 1 個が選ばれる確率 $3/15$ と期待値の加法性だけを使っている。

【第 3 問】

a を正の実数とし、2 つの放物線を

$$C_1: y = \frac{a+1}{4}x^2 - \frac{1}{2}, \quad C_2: y = -\frac{a+1}{4a}x^2 + \frac{1}{2}$$

とする。以下の問いに答えよ。

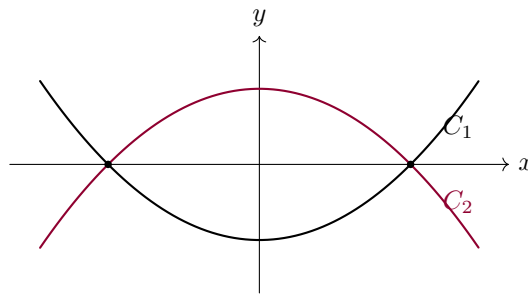
- (1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。
- (2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
- (3) a が動くとき、(2) の S の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

2 つの放物線の交点は、方程式を引き合わせると x^2 だけの式になる。囲まれた部分では C_2 が上、 C_1 が下なので、上下差を交点間で積分する。得られる面積は $8\sqrt{a}/(3(a+1))$ となり、最大化は $2\sqrt{a} \leq a+1$ 、すなわち $\sqrt{a}/(a+1) \leq 1/2$ に帰着する。

【解答】



模式図 ($a=1$)。上下差は交点で 0 となる下に凸の 2 次式である。

(1)

交点では $\frac{a+1}{4}x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{a+1}{4a}x^2 + \frac{1}{2}$ である。整理すると $\left(\frac{a+1}{4} + \frac{a+1}{4a}\right)x^2 = 1$ すなわち $\frac{(a+1)^2}{4a}x^2 = 1$ である。

$a > 0$ より $x = \pm \frac{2\sqrt{a}}{a+1}$ である。このときの y 座標は、たとえば C_1 に代入して

$$y = \frac{a+1}{4} \cdot \frac{4a}{(a+1)^2} - \frac{1}{2} = \frac{a}{a+1} - \frac{1}{2} = \frac{a-1}{2(a+1)}$$

である。よって交点は $\left(\pm \frac{2\sqrt{a}}{a+1}, \frac{a-1}{2(a+1)}\right)$ である。

(2)

交点の間では C_2 が上側、 C_1 が下側にある。上下差は

$$\left(-\frac{a+1}{4a}x^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{a+1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{(a+1)^2}{4a}x^2$$

である。したがって、 $h = 2\sqrt{a}/(a+1)$ とおくと

$$S = \int_{-h}^h \left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right) dx$$

である。計算して

$$\begin{aligned} S &= \left[x - \frac{x^3}{3h^2}\right]_{-h}^h \\ &= \frac{4h}{3} \\ &= \frac{8\sqrt{a}}{3(a+1)} \end{aligned}$$

である。

(3)

(2) より $S = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{a}}{a+1}$ である。 $a > 0$ なので $a+1 \geq 2\sqrt{a}$ より $\frac{\sqrt{a}}{a+1} \leq \frac{1}{2}$ である。等号は $a=1$ のとき成り立つ。したがって S の最大値は $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ である。

▶ 解法 2 ((3): 微分による最大化)

【方針】

$u = \sqrt{a} > 0$ と置き、面積を u の有理関数に直して増減を調べる。相加相乗平均で得た最大値を独立に検算できる。

【解答】

$u = \sqrt{a} > 0$ とおくと、(2) の結果は

$$S(u) = \frac{8u}{3(u^2 + 1)}$$

となる。微分すると

$$S'(u) = \frac{8(1 - u^2)}{3(u^2 + 1)^2}.$$

したがって S は $0 < u < 1$ で増加し、 $u > 1$ で減少する。よって $u = 1$ 、すなわち $a = 1$ のとき最大となり、

$$\max S = S(1) = \frac{4}{3}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 5。交点を出すと上下差が $1 - x^2/h^2$ の形になり、面積計算は短くなる。最大化では微分を使わず、相加相乗の関係 $a+1 \geq 2\sqrt{a}$ で十分である。交点の y 座標と上下関係を確認してから積分するのが採点上のポイントである。目安時間は 16 分前後。

採点点は、交点の x 座標だけでなく共通の y 座標、上下差の積分区間、最大値の等号条件 $a = 1$ である。AM-GM と微分の 2 通りで最大値を検算できる。

【第 4 問】

t を $t \geq 0$ を満たす実数とする。座標平面において、次の不等式が表す領域をそれぞれ A, B, C とする。

$$A: x^2 + y^2 + 2y - 1 \leq 0,$$

$$B: x^2 + y^2 - 2(t+1)x - 2t^2y + t^4 + 2t - 1 \leq 0,$$

$$C: x^2 + y^2 + 2(t+1)x - 2t^2y + t^4 + t^2 + 2t - 1 \leq 0.$$

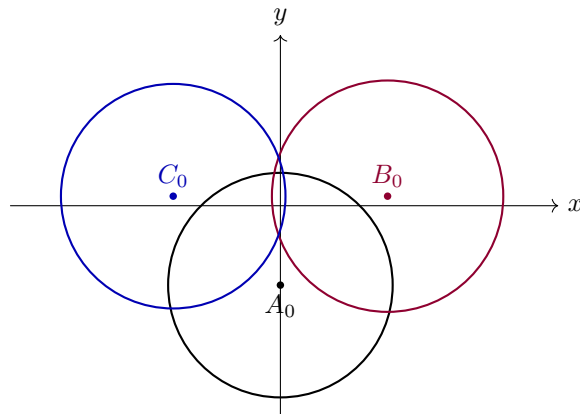
このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 0$ のとき、 A, B, C の共通部分 $A \cap B \cap C$ は空集合でないことを示せ。
- (2) B と C の共通部分が 1 点からなるとき、 t の値を求めよ。
- (3) t が (2) で求めた値のとき、 B と C の共通部分は A に含まれることを示せ。
- (4) $A \cap B \cap C$ が空集合でないための t の範囲を求めよ。

【方針】

3 つの不等式を円の内部として整理する。 A, B, C の中心と半径を明確にし、まず B と C の共通部分が 1 点になる条件を、2 中心間距離が半径の和に等しい外接条件で求める。(4) では、三者の共通部分があるためには少なくとも B と C が交わる必要がある。一方で B と C が交わる範囲では、 C の右端の点が B にも A にも入ることを示して十分性を出す。

【解答】



模式図. B_0, C_0 は同じ高さになり, t とともに左右へ離れる.

まず 3 つの領域を円として書き直す。

A は $x^2 + (y + 1)^2 \leq 2$ であるから, 中心 $(0, -1)$, 半径 $\sqrt{2}$ の円の内部である。

B は平方完成して $(x - (t + 1))^2 + (y - t^2)^2 \leq t^2 + 2$ である。したがって中心は $B_0 = (t + 1, t^2)$ で, 半径は $\sqrt{t^2 + 2}$ である。

C は $(x + (t + 1))^2 + (y - t^2)^2 \leq 2$ である。したがって中心は $C_0 = (-(t + 1), t^2)$ で, 半径は $\sqrt{2}$ である。

(1)

$t = 0$ のとき, 3 つの円の中心と半径は $A : (0, -1), \sqrt{2}$, $B : (1, 0), \sqrt{2}$, $C : (-1, 0), \sqrt{2}$ である。点 $(0, 0)$ からこれらの中心までの距離はそれぞれ 1, 1, 1 であり, いずれも $\sqrt{2}$ 以下である。したがって $(0, 0)$ は A, B, C すべてに含まれるので $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ である。

(2)

B と C の中心は同じ高さ t^2 にあり, 中心間距離は $2(t + 1)$ である。 B の半径は $\sqrt{t^2 + 2}$, C の半径は $\sqrt{2}$ である。 $t \geq 0$ では中心間距離が半径の差より大きいので, 1 点で交わるのは外接するときである。したがって $2(t + 1) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{2}$ を解けばよい。

この式を整理する。まず $2(t + 1) - \sqrt{2} = \sqrt{t^2 + 2}$ である。両辺を 2 乗して $3t^2 + (8 - 4\sqrt{2})t + 4 - 4\sqrt{2} = 0$ を得る。この 2 次方程式の $t \geq 0$ の解は $t_0 = \frac{2}{3} \left(\sqrt{3 - \sqrt{2}} + \sqrt{2} - 2 \right)$ である。

(3)

$t = t_0$ のとき, B と C は外接するので, 共通部分は接点 1 点だけである。この接点は, C の中心から右に半径 $\sqrt{2}$ だけ進んだ点だから $T = (\sqrt{2} - (t_0 + 1), t_0^2)$ である。

(2) の方程式で $t = 1/2$ を代入すると, 左辺は 3, 右辺は $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{2} = \frac{3}{2} + \sqrt{2} < 3$ である。また $t = 0$ では左辺が右辺より小さいので, 解 t_0 は $0 < t_0 < \frac{1}{2}$ を満たす。

したがって $|\sqrt{2} - (t_0 + 1)| \leq \sqrt{2} - 1$, $1 < t_0^2 + 1 < \frac{5}{4}$ である。よって

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - (t_0 + 1))^2 + (t_0^2 + 1)^2 &\leq (\sqrt{2} - 1)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \\ &= 3 - 2\sqrt{2} + \frac{25}{16} < 2 \end{aligned}$$

である。これは $T_x^2 + (T_y + 1)^2 < 2$ を意味するので, 接点 T は A に含まれる。したがって $t = t_0$ のとき, $B \cap C$ は A に含まれる。

(4)

まず $A \cap B \cap C$ が空でないなら, 少なくとも $B \cap C$ は空でない。 B と C が交わる条件は, 中心間距離が半径の和以下であること, すなわち $2(t+1) \leq \sqrt{t^2+2} + \sqrt{2}$ である。左辺と右辺の大小は (2) で求めた t_0 を境に変わるので, 必要条件として $0 \leq t \leq t_0$ を得る。

逆に $0 \leq t \leq t_0$ とする。点 $T_t = (\sqrt{2} - (t+1), t^2)$ を考える。この点は C の中心から右に $\sqrt{2}$ だけ進んだ点なので, C に含まれる。また 距離 $(T_t, B_0) = 2(t+1) - \sqrt{2}$ であり, $t \leq t_0$ では $2(t+1) - \sqrt{2} \leq \sqrt{t^2+2}$ だから T_t は B にも含まれる。

さらに $t \leq t_0 < 1/2$ なので, (3) と同じ評価により $(\sqrt{2} - (t+1))^2 + (t^2 + 1)^2 < 2$ である。したがって T_t は A にも含まれる。よって $A \cap B \cap C$ は空でない。

以上より, 求める範囲は $0 \leq t \leq \frac{2}{3}(\sqrt{3-\sqrt{2}} + \sqrt{2} - 2)$ である。

【総評】 難度 8、計算量 8。3つの領域を円として整理し, 中心間距離と半径で交わりを判定する問題である。(2) の外接条件だけでなく, (4) で三者の共通部分の十分性を示すための具体的な点 T_t を選ぶのが山場である。計算は重い, 中心・半径・接点・範囲の順に書けば見通しは保てる。目安時間は 30 分以上。

外接条件の解がただ 1 つであること, 必要条件 $B \cap C \neq \emptyset$ だけで止めず, 具体的な点 T_t が 3 領域すべてに入ることを示すのが採点の中心である。